NIVEL PRIMARIO

MATEMÁTICA

ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA
DE LOS CONTENIDOS CURRICULARES

AUTORIDADES PROVINCIALES

Gobernador:
Dr. José Manuel de la Sota

Ministro de Educación:
Prof. Evelina M. Feraudo

Subsecretario de Equipamiento Escolar, Proyectos y Políticas Educativas
Ing. Ricardo Jaime

Subsecretaria de Planificación y Gestión Educativa:
Dra. Amelia López

Agencia Córdoba de Inversión y Financiamiento

Presidente de la A.C.I.F.:
Cra. María Carmen Poplawski

Coordinador Ejecutivo U.CO.PRO
Cdor. Fernando Marcelo Arteaga

Subunidad Ejecutora
Subcomponente de Gestión y Cobertura del Sistema Educativo

Jefe de Equipos de Proyecto:
Lic. Horacio Ferreyra

Jefe de Proyecto Reforma y Fortalecimiento de la Gestión del Sistema Educativo:
Dr. Carlos A. Sánchez

Jefe de Proyecto de Autonomía Escolar:
Lic. Luján Mabel Duro

Pedro Bazán - Gladys Heredia
Coordinación de Proyectos y Políticas Educativas.
Marzo 2003

MATEMÁTICA

NIVEL PRIMARIO

Este documento tiene como objetivos reflexionar acerca del aprendizaje de algunos conceptos matemáticos a la luz de las conclusiones del O.N.E. (2 000) y sugerir revisiones en la enseñanza de algunos contenidos.

Presentación

Este documento toma como punto de partida el "Análisis de resultados de Matemática 6° año EGB", realizados por el equipo del Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa [I.D.E.C.E.]. Esta es una publicación tradicional que se realiza después de cada Operativo Nacional de Evaluación [O.N.E.], allí encontramos un análisis pormenorizado de los resultados, por contenidos y competencias considerando las distintas respuestas dadas por la totalidad de los alumnos evaluados a cada ítem del instrumento de evaluación.

En la siguiente tabla se presentan los porcentajes obtenidos en el Operativo según contenidos y competencias evaluadas en Matemática, a nivel nacional y jurisdiccional de Córdoba

Tabla: Resultados según contenidos y competencias evaluadas.

Contenidos	Nación [%]	Córdoba [%]
Números naturales	54,4	57,3
Números fraccionarios	68,8	73,1
Números decimales	63,2	65,2
Lenguaje gráfico y algebraico	56,6	59,7
Nociones geométricas	56,7	61,5
Medición	56,9	59,2
Estadística y probabilidad	59,1	62,3

Competencia	Nación [%]	Córdoba [%]
Reconocimiento de hechos	59,5	62,6
Reconocimiento de conceptos	60,5	63,1
Operar usando algoritmos	68,7	72,3
Resolución de problemas	51,7	55,1

Si bien es cierto que los porcentajes alcanzados en la Jurisdicción Córdoba están entre tres y cinco puntos por arriba de la media nacional, ambas curvas de rendimiento tienen un comportamiento prácticamente isomorfo. Esto nos permite compartir y asumir las conclusiones nacionales como propias.

Por ello, estos datos constituyen un importante llamado de atención hacia el cómo se están enseñando en la actualidad algunas competencias del quehacer matemático, y cuál es la demanda real que hace la sociedad de esta disciplina.

Según la publicación del I.D.E.C.E., la competencia resolución de problemas, resultó ser la que presenta mayores dificultades entre los alumnos que finalizan el 2do. Ciclo de la Escuela Primaria (E.G.B.2)

La resolución de problemas fue evaluada a través de once (11) ítemes, de los treinta y seis (36) que contenía la prueba completa. El promedio de respuestas correctas fue apenas del 51,7%, siendo el bloque de ítemes que obtuvo los menores logros. Ese valor, que corresponde a la media nacional, en Córdoba es apenas superior (55,1%), pero sigue siendo, el más bajo de todas las competencias evaluadas.

¿Qué es la "resolución de problemas"?

> *"**La resolución de problemas** es la capacidad cognitiva de aplicar diferentes estrategias, recursos o métodos para intentar soluciones a diferentes situaciones matemáticas".*

En pocas palabras, diremos que la competencia para resolver problemas en Matemática se adquiere tras un prolongado trabajo, por un lado complejo –debido a la cantidad de factores que involucra- y por otro lado sistemático, con actividades de enseñanza secuenciadas y significativas que la promuevan. Para ello, este documento plantea algunas orientaciones didácticas que constituyen sólo un aporte para el análisis de esta competencia.

En el proceso de la resolución de un problema pueden determinarse, según lo explicitara Polya[1], cuatro fases, a saber:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Es importante reconocer estas fases porque nos permite ver a la resolución de problemas como una secuencia en sí misma, con momentos relativamente independientes y descubrir cuándo el alumno presenta sus dificultades para orientar la enseñanza hacia ese particular.

Las cuatro fases exigen un buen manejo de los conocimientos que se ponen en juego en el problema. Si el alumno no los tiene, este es el momento propicio para la construcción de ese conocimiento matemático, en el marco del aprendizaje de un contenido escolar.

Las acciones que se efectivizan por todo el grupo clase -incluyendo al maestro- durante las cuatro fases de la resolución permite desarrollar lo que llamamos "el conocimiento en uso", es decir, una articulación entre el conocimiento que se posee y la situación, en un contexto didácticamente regulable y altamente significativo para el alumno. Remite a la puesta en juego de los conocimientos para resolver determinados problemas.

[1] Polya, G. : "Cómo plantear y resolver problemas" Edit. Trillas. Mexico, 1965.- (pp. 18). La primera edición inglesa es del año 1945.-

“Estas actividades deben permitirle al alumno aprender en situación los modos de hacer, pensar y comunicar propios de la matemática, el placer del desafío intelectual, así como valorar la importancia del saber matemático en la sociedad.”

Es muy importante la competencia del docente para analizar textos que refieran a problemas y el poder anticipar las posibles estrategias que utilizarán los alumnos durante su resolución, para orientar la construcción del conocimiento.

Analizamos a continuación un ítem aparentemente simple, según la opinión de los docentes, el cual aborda un contenido puntualmente explicitado en la Propuesta Curricular y que con seguridad es enseñado en todas las aulas de la Escuela Primaria.

Análisis de un ítem de la prueba

El ítem que analizaremos aquí, es el número 21 de la prueba y pertenece al bloque de los 11 (once) destinados a la evaluación de la competencia resolución de problemas y de estos, es el único que aborda contenidos de geometría.

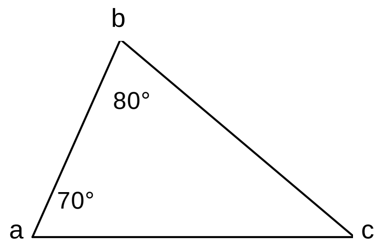
21 ¿Cuánto mide el ángulo c?

A) 30 °

B) 70 °

C) 150 °

D) 180 °



El ítem evalúa la capacidad de los alumnos para resolver un problema que requiere aplicar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Los datos son proporcionados en la figura y los alumnos deben sumar los ángulos conocidos y restar este resultado a 180°. La respuesta A) es la correcta y fue elegida por el 47% de los alumnos. Obviamente que esta propiedad es una parte importante en la conceptualización de “triángulo” que el niño está construyendo.

La opción ***D) 180°***, fue elegida en apenas el 8% de las respuestas, esto nos lleva a suponer que los alumnos “conocen” la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, pero no pudieron usar este conocimiento con éxito para calcular la amplitud del tercer ángulo, que es la incógnita del problema.

Es claro que éste es un interesante problema para evaluar la utilización (aplicación) de la propiedad geométrica, y la habilidad en el manejo de cálculo entre la medida de los ángulos.

Entre las respuestas incorrectas, la más elegida es la ***C) 150°***, por el 25% de los alumnos. Este número es el resultado de la suma de los dos ángulos interiores señalados en la figura como datos.

Como solemos decir los docentes, en los alumnos “hay una clara tendencia a operar con los datos para lograr algún resultado”, pues la cuarta parte de ellos optaron por este camino. ¿Qué pasó en este grupo de alumnos? ¿No lograron visualizar la incógnita del problema o quizás ni siquiera lo comprendieron y operaron con los dos números que tenían?

Si no lograron entender el ítem, habría que ver si esto se debe a la forma de presentarlo ¿qué experiencias tienen los alumnos en este tipo de resoluciones?, ¿resolvieron situaciones de opciones múltiples?, ¿desconocen el contenido que se quiere evaluar?, ¿resuelven habitualmente problemas presentados gráficamente?

Posibles estrategias de resolución

Los alumnos que resolvieron el ítem exitosamente, quizás se centraron en un procedimiento más aritmético. Sabemos que la resolución del problema **aritméticamente hablando** requiere efectuar “dos operaciones sucesivas”, esto exige en la elaboración del plan de trabajo, considerar por lo menos “dos pasos ordenados en una secuencia”.

a. $70^\circ + 80^\circ = 150^\circ$

b. $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

Otra estrategia, más cerca del cálculo pensado, es “por completamiento”:

$$70^\circ + 80^\circ + c = 180^\circ$$
$$150^\circ + c = 180^\circ$$
$$150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$$

Es decir: **c mide 30º**

En cualquiera de las estrategias seleccionadas se pone en juego la dinámica de los conocimientos que convergen en la resolución del problema, como son:

- La propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.
- La noción de ángulo y la medida de su amplitud construida hasta el momento.
- Lectura de una representación gráfica, con datos cuantitativos ubicados en ella.
- Cálculo pensado (escrito u oral) en el campo de la suma de amplitudes de ángulos.

En síntesis, se pone en juego la relación entre el pensamiento aritmético, para el cálculo numérico y el geométrico, que le permite visualizar la situación en el triángulo y esbozar un plan de trabajo.

Hasta aquí hemos analizado la situación para la solución del ítem.

¿Por qué este ítem no es resuelto?

Si partimos del supuesto que los alumnos conocen la propiedad de la suma de los ángulos interiores del triángulo, cabe preguntarnos para qué le sirve, si cuando tiene que aplicarla no la puede utilizar con éxito. ¿En qué consiste este “conocer”?:

- ☞ ¿sólo en verbalizar el enunciado?,
- ☞ ¿en escribir la fórmula general?,
- ☞ ¿en verificarla con material concreto?
- ☞ ¿en ensayar distintas respuestas?,
- ☞ ¿en haber logrado un modelo suficientemente dinámico?

En este punto, es necesario detenerse y hacer alguna referencia al rol que tiene el "conocimiento en uso", es decir la habilidad adquirida para poder usar y aplicar este conocimiento en distintos contextos y/o en nuevas situaciones.

Mirando desde otro ángulo, ¿por qué no se lograron aprendizajes suficientemente potentes, que puedan ser utilizados en la presentación de nuevas situaciones que los involucren?

En este sentido es posible señalar distintas variables de análisis, las que están íntimamente ligadas a los conocimientos adquiridos por los niños que cursan la escuela primaria.

Ellas tienen que ver con:

1. "los aprendizajes requeridos por los alumnos",
2. "el objeto de conocimiento matemático" y
3. "la forma de enseñarlo que se adoptó".

Cuando se trata del contenido *triángulo*, ¿cuál es la demanda que hace el alumno?, ¿centra su interés en la forma, en el uso, en las clasificaciones posibles, en la construcción?, ¿en las condiciones para su construcción? Y desde donde lo hace... ¿desde el conocimiento de sus lados o de sus ángulos o una combinación de ambos?

En todos los casos el aprendizaje se efectiviza a partir de los conocimientos previos que posee el alumno, y ellos a su vez orientan, tanto los intereses de la demanda como las posibles estrategias anticipadoras con las que acciona en la resolución de cualquier situación.

Otras demandas de los alumnos tienen que ver con su contexto social, ¿qué papel juegan las experiencias culturales de su comunidad, los patrones de representación y comunicación, las verbalizaciones que él puede realizar de sus aprendizajes?

Respecto del objeto de conocimiento matemático, podemos destacar el alto grado de abstracción que posee el contenido "ángulo" en general, su medida en particular, y la relación de éstos, en la suma de los ángulos interiores del triángulo.

Cuando Dilma Fregona[2] hace referencia a este punto dice (...) "numerosos trabajos en educación matemática dan cuenta de las dificultades que tienen los niños con la noción de ángulo, y la comparación y medición de ángulos." Podríamos remarcar que lo está diciendo en un texto para docentes de alumnos que concurren al 1º año del C.B.U.

Por otro lado, si hacemos el análisis de la respuesta al ítem, desde el supuesto que los alumnos "conocen" la propiedad geométrica[3] pero en la resolución se apoyan sólo en sus saberes aritméticos, alrededor de la suma y la resta, buscando la respuesta a través de un cálculo numérico, sin interpretar la significación y el sentido de la operación aritmética en sí y sin llegar a reconocer la combinación requerida en este caso

[2] FREGONA, Dilma: "El libro del Docente" del Libro de la Matemática 7- Edit. Estrada. Bs. As. 1996.
[3] En pagina 3, se consideró que la respuesta **D) 180º** es descartada por más del 92 % de los alumnos, lo que indicaría que conocen por lo menos el texto de la propiedad.

particular. Es decir, no pueden traducir el texto del ítem (dibujo con datos), al lenguaje aritmético correspondiente.

Independientemente de la estrategia que hayan utilizado, se verifica la poca movilidad de pensamiento –en términos de reversibilidad- que han logrado en la escuela primaria, en un contenido que, a primera vista, parece tan elemental y primitivo [inicial], como es la competencia para sumar y restar números relativamente pequeños.

En consecuencia cabe preguntarnos ¿cómo se enseñó "triángulo"?, ¿cómo se habrá enseñado el contenido "suma de ángulos interiores del triángulo"?, ¿cuál habrá sido el objetivo en este trabajo?, ¿con qué criterio se organizó la secuencia de actividades que desarrollaron estos contenidos?, ¿qué otros contenidos se involucraron?

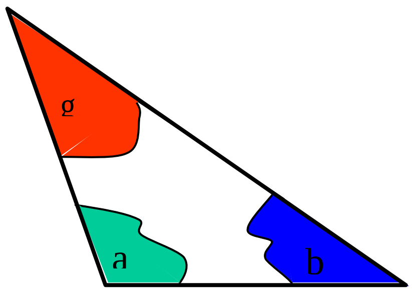
Estas preguntas nos remiten a la enseñanza. Por un lado, al saber alcanzado por el docente respecto de estas conceptualizaciones geométricas y por otro a la valoración que realiza acerca del aporte de estos contenidos en la formación matemática de sus alumnos, especialmente en lo referido al logro de la "competencia de resolución de problemas"

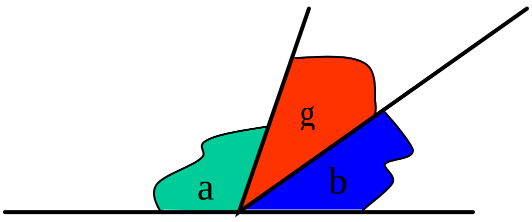
Se pone de manifiesto la construcción de los conceptos de triángulo y de ángulo que el docente ha logrado, la fluidez y habilidad para construir formas y/o figuras en su mente y por ende la dinámica que ellas tienen cuando son evocadas para la resolución de alguna situación problemática. Por otro lado también está presente la valoración que él ha podido realizar acerca de estos logros en su formación matemática.

Todo ello aporta a la intencionalidad que orientará la elaboración de las secuencias didácticas que finalmente propondrá a sus alumnos.

Una forma de trabajo tradicional

Es clásica la actividad que consiste en dibujar el triángulo, pintar los ángulos interiores, designarlos con alguna letra –pueden ser griegas- luego recortar cada uno de ellos y "sumar" los tres ángulos recortados.





Para ello, sólo hay que respetar algunas condiciones como son pegarlos en forma consecutiva, hacer coincidir los vértices, también los lados comunes y lograr un ángulo llano. De esta manera se puede concluir que "la suma de los tres ángulos interiores del triángulo, es tanto como un ángulo llano y mide 180º ".

Esta es una interesante actividad, entretenida, donde el recurso didáctico que se utiliza la hace de implementación simple. Quizás éstos sean los ingredientes que la hicieron perdurar a través de tanto tiempo en las aulas de nuestras escuelas primarias.

¿Es suficiente este hacer?

Ahora bien, ¿realizar este tipo de actividades, alcanza para aprender "la propiedad"? En ese caso, ¿es un aprendizaje que puede ser usado en distintas situaciones problemáticas donde los requerimientos no son de aplicación tan directa?; ¿es posible que el alumno recurra a ella en la resolución de un problema que la involucre? Las distintas evaluaciones realizadas en los últimos años nos están diciendo que no es así.

Si las actividades son planteadas con la convicción de que la propiedad "ya fue enseñada", se intentará afianzar el saber sólo con algunos ejemplos de verificación, o haciendo algunos cálculos.

De esta manera no tendremos garantías de un buen manejo de la propiedad, ni de la adquisición de la habilidad para el uso de la misma en situaciones reales o concretas.

¿Hacia donde reorientar la actividad áulica?

La idea es diversificar la propuesta de actividades donde se trabaje el contenido triángulo desde distintas posibilidades de uso, para que provoque discusiones, argumentaciones y propicie un clima de búsqueda, de generación de nuevas situaciones a partir de las dadas.

La Propuesta Curricular ubica estos contenidos en el 2do Ciclo. Más precisamente en el 5to grado cuando dice:

- Reproducción y construcción de ángulos con papel de calcar, transportador, regla y compás.
- Construcción de (...) triángulos con regla y compás.
- Exploración y utilización de la propiedad triangular para determinar si es posible o no la construcción de un triángulo dados tres segmentos.
- Resolución de problemas que involucren la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo.

Si bien es cierto que aquí no se intenta mostrar una secuenciación rigurosa para ser llevada al aula, estas orientaciones implican una propuesta didáctica respecto de una forma de trabajo, relacionada con la conceptualización del triángulo.

"Construir" con los útiles de geometría, después de "reproducir y construir" con el papel de calcar, exige adentrarse en el manejo de las propiedades del triángulo y especialmente anticipar un proyecto para la construcción de la figura.

La posibilidad de armar y desarmar esas figuras con algunas condiciones (los vértices coinciden, tienen un lado en común, los ángulos son consecutivos, reconocer una figura testigo, etc.) debieran llevar al niño a descubrir algunas regularidades, esbozar espontáneamente algunas conclusiones, que en realidad podrían ser nuevas propiedades o expresiones distintas de las mismas.

Con este tipo de actividades los alumnos pueden llegar a conclusiones tales como:

- ✓ "La suma de dos ángulos interiores de un triángulo, es igual al ángulo exterior correspondiente al otro (tercero) ángulo"
- ✓ "Un ángulo interior es el suplemento del ángulo suma de los otros dos"
- ✓ "Con tres ángulos dados, no siempre se puede construir un triángulo"

A estas afirmaciones se puede arribar -aun en grados inferiores- trabajando con los mismos recursos de la actividad que describíamos anteriormente. Se podría agregar el dibujo y posteriormente el recorte de figuras en papel (quizás primero el transparente y luego el opaco) y por último incorporar las construcciones, pues éstas en general exigen un grado de abstracción mayor y cierta habilidad en el uso de los útiles de geometría.

En todos los casos, es importante que las consignas se orienten a desarrollar la movilidad de pensamiento en el marco de las figuras planas, en particular podríamos referirnos (en 4to y 5to grado), por lo menos a la conceptualización del triángulo y el cuadrilátero.

Es cierto que la geometría trabaja con abstracciones, modelizaciones, figuras abstractas, entes abstractos. Pero no es menos cierto que estas abstracciones geométricas mucho antes comenzaron siendo en la vida del niño, modelos de objetos físicos que se manipulaban, se desplazaban, se encajaban, etc. Continúa el proceso, y más adelante son figuras o dibujos en hojas de papel que se pintan, que se recortan y hasta se construyen con útiles de geometría, pudiendo cumplir ciertas condiciones. Finalmente esos niños, en un momento de este proceso pueden evocar esas figuras e incorporarle la dinámica del movimiento.

Estas vivencias constituyen alguna de las etapas de este camino que recorren nuestros alumnos de la escuela primaria para el logro de la conceptualización de las figuras geométricas.

Creemos, porque lo hemos verificado con distintos grupos clase, que esta forma de trabajo aporta fuertemente al desarrollo de la competencia “resolución de problemas” en nuestros alumnos, aunque también estamos seguros que sólo el resolver los distintos tipos de problemas y el estudio del conjunto de las estrategias propias de cada una de las fases, llevarán al alumno al pleno logro de esta competencia.

Algunos ejemplos de actividades

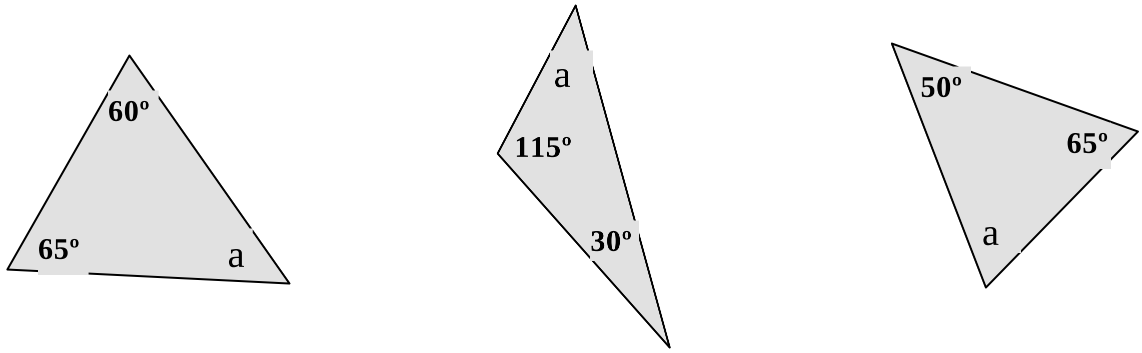
> “..., es la resistencia de la situación la que obliga al sujeto a acomodarse, a modificar o percibir los límites de sus conocimientos anteriores y a elaborar nuevas herramientas (idea de conflicto cognitivo).”[4]

Presentamos a continuación algunas actividades, ellas son sólo un ejemplo de una secuencia para el desarrollo del contenido referido a la propiedad de los ángulos interiores de un triángulo. Se pueden hacer muchas y variadas propuestas.

- ☞ Construye una figura que tiene sus tres ángulos de 60º.-
- ☞ Construye un triángulo que tiene un ángulo de 30º y uno de 120º. ¿Cuánto mide el tercer ángulo?
- ☞ En las consignas anteriores, ¿hay una única figura como respuesta?. Explica por qué.
- ☞ Construir un triángulo isósceles que tenga algún ángulo de 50º. ¿Cuánto mide cada uno de los otros ángulos? Para esta pregunta, ¿hay una única respuesta?. Explica por qué.

[4] Charnay, Roland: “Aprender (por medio de) la resolución de problemas”. Cap. III, en **Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones**. Edit. Paidos. Bs. As. (pp. 59).-

☞ Calcula la medida del ángulo α , en cada uno de los triángulos.



☞ Completa la siguiente tabla. (Si fuese necesario puedes ayudarte haciendo el correspondiente dibujo)

Orden	**Ángulos interiores**			**¿Pueden ser los ángulos de un triángulo?**	**Por sus ángulos, ¿qué tipo de triángulo es?**	**Por sus lados, ¿qué tipo de triángulo es?**
	a	b	g			
a	90º	45º	45º			
b	60º	65º	70º			
c	40º	70º	70º			
d	35º	55º	80º			
e	110º	30º	40º			
f	60º	60º	60º			

Nota: Actividades elaboradas en base a las que figuran en “Carpeta de Matemática 5 – EGB 2”. Cuadernillo verde. Edit. Aique. Bs. As. 2003.-

La implementación de este tipo de actividades requiere por parte del docente un análisis previo, en el que se incluyen las posibles soluciones que presenta el problema, las distintas estrategias a las que recurriría el alumno, al igual que las representaciones y verbalizaciones que utiliza en la comunicación.

En 5to. Grado, en general no se logran verbalizaciones del nivel que corresponde a la demostración de un teoremas o abstracciones propias del rigor matemático.

Pero sí es importante que el alumno perciba “un problema a resolver”, pueda vivenciar un accionar de búsqueda de soluciones, “que supone una dialéctica pensamiento-acción muy diferente a la de una simple manipulación guiada, tendiente a menudo a una tarea de constatación por parte del alumno...”[5]

A modo de despedida

Dijimos que uno de los objetivos de este documento es reflexionar acerca del aprendizaje de conceptos matemáticos. Para este fin seleccionamos una de las propiedades del triángulo que aun cuando fuera enseñada en la Escuela Primaria no es utilizada correctamente para la resolución de problemas.

[5] Charnay, Roland. Obra citada.-

El análisis realizado hasta aquí nos da pie para abordar en una entrega posterior, las estrategias que se ponen en juego en cada una de las cuatro fases de la resolución de un problema[6], que por su formulación trascienden el campo de la matemática.
Creemos que el análisis realizado puede ser valioso para un docente comprometido con su diaria tarea de enseñar y exige modificar algunas prácticas de enseñanza.

[6] Polya, George. Obra citada.-