MATEMÁTICA

ORIENTACIONES PARA LA ENSEÑANZA
DE LOS CONTENIDOS CURRICULARES

AUTORIDADES PROVINCIALES

Gobernador:
Dr. José Manuel de la Sota

Ministro de Educación:
Prof. Evelina M. Feraudo

Subsecretario de Equipamiento Escolar, Proyectos y Políticas Educativas
Ing. Ricardo Jaime

Subsecretaria de Planificación y Gestión Educativa:
Dra. Amelia López

Agencia Córdoba de Inversión y Financiamiento

Presidente de la A.C.I.F.:
Cra. María Carmen Poplawski

Coordinador Ejecutivo U.CO.PRO
Cdor. Fernando Marcelo Arteaga

Subunidad Ejecutora
Subcomponente de Gestión y Cobertura del Sistema Educativo

Jefe de Equipos de Proyecto:
Lic. Horacio Ferreyra

Jefe de Proyecto Reforma y Fortalecimiento de la Gestión del Sistema Educativo:
Dr. Carlos A. Sánchez

Jefe de Proyecto de Autonomía Escolar:
Lic. Luján Mabel Duro

Pedro Bazán

Gladys Heredia
Coordinación de Proyectos y Políticas Educativas.

Matemática **Marzo 2003**

Introducción:

El presente documento tiene como objetivo sugerir a los profesores orientaciones didácticas para optimizar la enseñanza de la matemática en el C.B.U., teniendo en cuenta que los resultados del Operativo Nacional de Evaluación (O.N.E.) muestran índices de logros que es necesario mejorar.

El análisis de los resultados de las pruebas, permite inferir los conocimientos y las dificultades de aprendizajes matemáticos de los alumnos.

La consideración anterior, nos lleva a plantearnos algunos interrogantes al respecto:

¿Qué conocimientos matemáticos deben aprender los alumnos en el C.B.U.?, ¿qué actividades de aprendizaje se plantean a los alumnos para que construyan conocimientos matemáticos?.

A partir del análisis de algunos de los ítemes de la prueba administrada, intentaremos explicitar sugerencias didácticas que si bien, en principio están pensadas para la E.G.B.3 (CBU), se proyectan hacia el C.E.

La siguiente tabla presenta los porcentajes obtenidos en el O.N.E. 2000 según contenidos y competencias evaluadas en Matemática, a nivel nacional y en la jurisdicción Córdoba.

Tabla: Resultados según contenidos y competencias evaluadas por el O.N.E. - Matemática 3° año C.B.U. Porcentaje de Respuestas

Contenidos	Nación [%]	Córdoba [%]
Número y operaciones	54,60	59,20
Funciones	49,80	53,70
Lenguaje gráfico y algebraico	60,90	67,20
Medición	53,20	57,10
Estadística y probabilidades	62,90	67,30
Geometría	46,70	52,50

Competencias	Nación [%]	Córdoba [%]
Reconocer	60,30	67,60
Conceptualizar	49,40	53,80
Aplicar algoritmos	58,60	62,50
Resolver problemas	53,10	57,60

Como se puede observar, las competencias evaluadas se relacionan unas con otras, es decir los conocimientos de alguna de ellas incide en el desarrollo de otras.

Sin embargo, al analizar los resultados según los porcentajes alcanzados, advertimos logros poco satisfactorios en la **conceptualización y resolución de problemas.** Por ello en el desarrollo del presente documento se plantearán algunos análisis y reflexiones didácticas en relación a estos contenidos y competencias. Dada la importancia de las mismas en el aprendizaje matemático, es necesario hacer una breve referencia conceptual.

La **conceptualización** supone un complejo proceso de construcción de conocimientos. A medida que la comprensión avanza se producen nuevas significaciones que implican otras relaciones y en consecuencia el concepto alcanza otro nivel o status.

La puesta en cuestión de los conocimientos que disponen los alumnos es lo que motoriza el proceso de construcción. Para que esta trama conceptual progrese en calidad, amplitud y densidad se requiere que el docente implemente propuestas didácticas que la promuevan a partir de los saberes personales construidos.

La **resolución de problemas** es entendida como "la capacidad cognitiva de aplicar diferentes estrategias, recursos o métodos para intentar soluciones a diferentes situaciones matemáticas."

Ya en los años '40, Polya[1] distinguía cuatro fases como necesarias para transitar en la resolución de un problema, a saber:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida.

Creemos que para el docente es una importante ayuda reconocer estas fases. Puede ver a la resolución de problemas como una secuencia en sí misma, con momentos relativamente independientes y descubrir cuándo el alumno presenta sus dificultades para orientar su enseñanza hacia ese particular.

Las cuatro fases exigen un buen manejo de los conocimientos que se ponen en juego en el problema. Si el alumno no los posee, este es el momento para desarrollarlos, aquí es donde aparece la necesidad de "poner en acto" la conceptualización.

Si bien es cierto que la conceptualización y la resolución de problemas son dos competencias distintas, no es menos cierto que en la mayor parte de cualquier "clase" de matemática, ambas están presentes y se tensionan mutuamente. En este tensionar es donde se construyen los aprendizajes, siendo éstos a su vez los que orientan las decisiones didácticas del profesor en el seno de la clase.

La resolución de problemas en sus diferentes fases exige por parte del alumno, una anticipación para elaborar las estrategias de trabajo que dependerá de su nivel de conceptualización. Y es el nivel de conceptualización alcanzado el que orienta la selección de las estrategias que pondrá en juego.

En cuanto a los contenidos, se puede observar en la tabla de resultados, que **funciones** es uno de los contenidos en que los alumnos presentan menor rendimiento.

[1] Polya, George. : "Cómo plantear y resolver problemas" Edit. Trillas. México, 1965.- (pp. 18). La primera edición inglesa es del año 1945.-

La prueba pretende evaluar los aprendizajes acerca de “funciones” que los alumnos han logrado hasta el 3º año.

Al respecto el estudio realizado por el Instituto para el Desarrollo de la Calidad Educativa (I.D.E.C.E.) refiere a las siguientes especificaciones relacionadas con la **Proporcionalidad**

- Reconocer si una situación problemática responde o no a una función de proporcionalidad.
- Resolver situaciones problemáticas recurriendo a la aplicación de magnitudes directa e inversamente proporcionales.
- Resolver situaciones problemáticas que requieran la aplicación de porcentajes.
- Calcular porcentajes.
- Resolver situaciones problemáticas que requieran establecer equivalencias monetarias.
- Extraer información cuantitativa y/o cualitativa a partir de escalas.

Analizaremos a continuación los cuatro ítemes de la prueba, seleccionados por el I.D.E.C.E. en relación al contenido proporcionalidad y a las dos competencias ya mencionadas.

Los dos primeros se vinculan con la proporcionalidad desde el porcentaje: el ítem17 es la selección del recipiente que está ocupado en un 25% de su capacidad, cuya presentación es desde un dibujo y el ítem 19 es el cálculo del porcentaje de un número.

Los otros dos ítemes: el 18 y el 21 de la prueba, están referidos al reconocimiento de la proporcionalidad directa e inversa respectivamente. El primero lo hace desde una tabla y el otro desde una situación presentada en forma verbal - escrita.

Análisis de ítemes

Ítem 17.

17 El recipiente que está lleno hasta el 25 % de su capacidad total es:

A) I

B) II

C) III

D) IV

M090154

Este ítem es respondido correctamente por el 67% de los alumnos que realizan la prueba. Si bien no llega a ser el 75 % esperado como óptimo, es un valor próximo y vale la pena analizarlo como un aprendizaje logrado, en el contexto de toda la prueba. El resto distribuye su respuesta equitativamente entre las otras tres opciones.

La presentación de los recipientes como dibujos y además la forma característica para señalar el 25 %, orienta la estrategia de solución a un análisis más bien perceptivo visual, muy similar a los trabajos que los alumnos habitualmente realizan en clase con el reconocimiento de la fracción en distintas formas geométricas planas.

Quizás esta respuesta de los alumnos estuvo basada en sus conocimiento de la fracción, como "la parte de un todo" en su expresión porcentual, sin llegar a transitar el carril de la proporcionalidad.

Otra estrategia de resolución pudo ser el **descartar las formas irregulares**, por su asociación del 50% equivale a "la mitad" y el 25 % a "la cuarta parte", verbalizaciones que están próximas al contenido fracción.

Ítem 19.

19 El 20 % de 950 es igual a

A) 1900

B) 475

C) 190

D) 47,5

M090234

El ítem solicita el cálculo del porcentaje de un número natural. El análisis realizado por el I.D.E.C.E. afirma que sólo el 46% de los alumnos resolvieron el ítem correctamente. El resto distribuyó casi uniformemente sus respuestas entre las otras tres opciones presentadas: **A) 1900**, con el 14% de respuestas, **B) 475**, con el 18% de respuestas y **D) 47,5** con el 19% de respuestas.

¿Por qué un cálculo numérico en la conceptualización de la función proporcionalidad?

Si bien es cierto que hablar de cálculo nos lleva a pensar en operaciones con números abstractos, no es menos cierto que para llegar a este "cálculo pensado" hay un camino de modelización de su comportamiento en distintas situaciones. La resolución de problemas con distintas formas de presentación y en distintos contextos de uso, es lo que va cargando de significación a las operaciones que realiza el alumno para dar respuesta a estas situaciones. Es en el desarrollo de este proceso donde se van logrando las conceptualizaciones de los contenidos matemáticos.

Podríamos decir que el nivel de estas conceptualizaciones están relacionadas con la variedad de situaciones presentadas a los alumnos, ya que cuanto más diversas sean las mismas, habrá mayores posibilidades de resignificación del concepto en cuestión.

En el cálculo de un porcentaje, tomado éste como un contenido escolarizado, los alumnos pueden poner en juego distintas y variadas estrategias, asociadas siempre a las experiencias en las cuales elaboró este conocimiento: como una fracción, como una razón, como una relación respecto del cien, como una proporción o como una función.

¿Qué estrategias utilizaron los alumnos para la resolución?

Si el alumno entendió el porcentaje 20% como una fracción centesimal $\frac{20}{100}$, pudo haber buscado el $\frac{20}{100}$ de 950 como una multiplicación de una fracción por un natural. De esta manera no utiliza el concepto de proporcionalidad para resolverlo, ¿qué nos dice esto? La correcta resolución del ítem no nos garantiza que el alumno esté pensando en relaciones funcionales, ni siquiera en la proporcionalidad aritmética.

Algunos pudieron elegir el camino de la "regla de tres simple directa" y aplicar el algoritmo tradicional

% Nro
100 ---------950
20 ---------- x luego $x = \frac{20 \times 950}{100}$

Evidentemente esta última estrategia marca un avance hacia la conceptualización de la proporcionalidad, siempre que no se halla "impuesto" como un estereotipo de trabajo mecanizado. Porque aquí se podría reconocer la variación de la magnitud porcentaje en la primera columna y también la variación de las cantidades correspondientes en la otra. Este razonamiento lo acerca a la visualización de la proporcionalidad como función y su representación en tablas.

Lo esperado sería que pueda utilizar la proporción "100 es a 950 como 20 es a x", en este caso sí podríamos anticipar que ha logrado una conceptualización de la proporcionalidad aritmética, aunque no necesariamente llegue a la relación funcional. Como aplicación de un pensamiento dinámico del cálculo en distintas situaciones de las dos magnitudes y que el porcentual indica una de estas posiciones.

¿Cómo operaron los alumnos que seleccionaron las respuestas incorrectas?

Los alumnos que optaron por la opción A) la resolvieron operando 950 x 2 = 1900 y los que optaron por la B) hicieron también un planteo equivocado pero dividiendo por 2.

Los que eligieron la opción D) efectuaron la división entre los dos números dados,

950 : 20 = 47,5. Esta es una actitud común, "operar con los datos numéricos del problema, para obtener un resultado"

Esto muestra que el alumno el desconoce el cálculo de un porcentaje. ya que podría haberlo resuelto a través de la proporción que se puede plantear o, por regla de tres o, simplemente utilizando la fracción centesimal de un número natural. Estrategias aritméticas esperables al cabo del C.B.U.

Es importante hacer notar que en las tres opciones incorrectas el número 100 no está presente en ninguno de los cálculos y es el referente conceptual más significativo en el cálculo del porcentaje.

En la resolución de este ítem de porcentaje resuelto utilizando regla de tres, fracciones o proporciones, el 100 juega un papel fundamental. Aun cuando el planteo de resolución sea equivocado el 100 no debiera estar ausente.

Esta problemática muestra dificultades muy importantes y básicas en cuanto al dominio de un concepto tan fundamental de la matemática como es el "porcentaje", y esto sucede en más de la mitad de los alumnos que realizaron la prueba.

Ítem 21.

21	Un fabricante envasa caramelos en bolsas de 50 caramelos cada una. Necesita 72 bolsas para envasar la totalidad de los caramelos. Si ahora desea envasarlos en bolsas de 150 caramelos cada una, ¿cuántas bolsas usará para la misma cantidad de caramelos? A) 24 B) 36 C) 172 D) 216 *M090022*

En este problema se presenta una relación de proporcionalidad inversa entre las dos magnitudes (caramelos y bolsas), siendo constante la totalidad de los caramelos. La respuesta correcta es la **A) 24**, y fue seleccionada por el 47% de los alumnos.

¿Qué estrategias utilizaron los alumnos para su resolución?

Seguramente que fue visto como un problema aritmético de dos pasos, este es quizás el razonamiento más simple que se puede esgrimir. Por ejemplo: analicemos las estrategias de un alumno que primero encontró la totalidad de los caramelos (72 x 50 = 3600) y después los particionó, (los dividió) en bolsas de a 150 caramelos (3600 **:** 150 = 24). Esto muestra que ha logrado el significado de la multiplicación y división en el conjunto de los números naturales pero no reconoce la relación que se establece entre la magnitudes (número de caramelos y número de bolsas).

Otros alumnos pudieron haber visualizado el ítem como un problema de relaciones de proporcionalidad inversa. Aquí el razonamiento está comenzando a escapar del pensamiento aritmético, ya que quizás logra ver a las magnitudes como cantidades que varían, y en ese caso su conceptualización es más compleja. El alumno puede recurrir a la aplicación de la regla de tres inversa y aplicar el tradicional "planteo algorítmico" o si ubica la proporcionalidad inversa entre las dos magnitudes y reconoce la igualdad

$$x_1 \times y_1 = x_2 \times y_2$$

donde "x" es la cantidad de caramelos y "y" es la cantidad de bolsas. De esta manera puede escribir la relación y resolverla con los datos del problema.

A primera vista parecería hasta más difícil, pero de esta manera cuando logra establecer la relación entre las dos magnitudes, prácticamente el problema ha concluido y el resto sólo consiste en efectuar correctamente el cálculo numérico.

$$72\,bol \times 50\,car = x \times 150\,car$$

$$x = \frac{72bol \times 50car}{150car}$$

$$x = 24bol$$

¿Cómo operaron los alumnos que seleccionaron las respuestas incorrectas?

Los alumnos que optaron por (B) pueden haber operado de la siguiente manera,

72 : 2 = 36, o haber obtenido la constante k = 3600. Como la cantidad de caramelos por bolsa queda aumentada en 100 (pasa de 50 caramelos a 150 caramelos), divide la constante en 100 (3600 : 100 = 36). En este caso, asocia el aumento directamente con la suma y la disminución la logra con la división,

En la opción (C) suma a las cantidades correspondientes 100 (50 + 100 = 150 y 72 + 100 = 172), no reconoce lo inverso y además concibe a la proporcionalidad dentro de un campo aditivo.

Y por último en la opción (D) transfiere propiedades de la proporcionalidad directa (al triple, el triple)

Ítem 18.

18 La tabla muestra los valores de **x** e **y** donde **x** es directamente proporcional a **y**.

x	3	6	P	9
y	7	Q	35	21

¿Cuáles son los valores de P y Q?

A) P = 18 y Q = 15

B) P = 02 y Q = 05

C) P = 14 y Q = 15

D) P = 15 y Q = 14

M090197

Este ítem evalúa la capacidad del alumno para encontrar los dos valores que completan una tabla de proporcionalidad directa. Sólo el 25% de las respuestas son correctas. Es el que ofreció mayores dificultades para su correcta resolución.

Para resolverlo los alumnos pueden recurrir a la aplicación de diversas estrategias que van, desde el conteo intuitivo basado en un proceso más ligado a lo aditivo como es por ejemplo la escala, hasta un fluido manejo de las propiedades de la proporcionalidad directa entre dos magnitudes.

Entre las diversas estrategias de resolución a la que pueden recurrir los alumnos, están la búsqueda de regularidades, el uso de las fracciones equivalentes, o descubrir la forma en que se relacionan los valores “al doble el doble”...

En los niveles de mayor conceptualización los alumnos pueden recurrir a dos formas:

☞ Armar la proporción $\frac{3}{6}=\frac{7}{Q}$ y aplicando la propiedad fundamental de las proporciones: "el producto de los extremos es igual al producto de los medios" y luego hallar Q.

☞ Buscar la constante de proporcionalidad $k=\frac{y}{x}$; $k=\frac{7}{3}$ ó $k=\frac{21}{9}$ y a continuación operar con ella para obtener los valores de P y Q, según el caso.

El 22% de los alumnos optó por B) P = 2 y Q = 5. Esto hace pensar que los alumnos saben que para completar la tabla, tienen que operar con los datos, pero utilizan operaciones que no responden al concepto de proporcionalidad directa. En este caso, efectuaron 6 : 3 = 2 , como valor de P y 35 : 7 = 5 para hallar Q. El alumno opera con dos casilleros con datos , apoyándose en la idea de que el cociente entre dos valores de una misma variable, se corresponde con el cociente entre los valores correspondientes de la otra variable. El error estuvo en efectuar el cociente entre los valores no correspondientes.

Este tipo de actividades contribuye a que los alumnos desarrollen el reconocimiento de dos cantidades que se vinculan entre sí y que lo hacen de una manera muy particular.

Descubrir esta particularidad es entrar a transitar en las primeras ideas de función. Desde el vínculo entre cantidades aritméticas se proyecta la búsqueda de relación entre variables, relación que hace que una dependa de la otra y lo haga de una manera especial. Dejar pensar a los alumnos y trabajar con lo que ellos han construido y han podido verbalizar contribuye a generar mayores niveles de conceptualización de la función y de la función de proporcionalidad directa en particular.

La enseñanza de la proporcionalidad en esta etapa requiere de un amplio despliegue de situaciones en donde se ponen en juego relaciones proporcionales y no proporcionales, tales como:

"Si duplico la cantidad de dinero que tengo para gastar en frutas, ¿qué ocurre con la cantidad de frutas que compro?"

"Si duplico la cantidad de cajas que tengo para guardar una docena de lápices, ¿Qué cantidad de lápices coloco por caja?"

El trabajo con este tipo de problemas permiten a los alumnos comprender la relación de proporcionalidad directa o inversa entre magnitudes, a la vez que supera reglas de procedimientos matemáticos muy instaladas en etapas anteriores como por ejemplo "a más, más" y "a más, menos" y que no garantiza la proporcionalidad.

También es importante presentar a los alumnos situaciones que no son proporcionales y que es común que ellos recurran a la proporcionalidad directa para resolverlos, por ejemplo:

"Si a los 2 años un niño mide 0,80 metros, ¿cuánto medirá a los 4 años?¿y a los 6 años? ¿y a los 18 años?.

En este ejemplo se observa claramente que a los cuatro años es imposible que mida 1,60 metros, a los 6 años 1,90 metros puesto que dichos resultados están muy alejados de la realidad aunque los primeros datos sean ciertos.

A modo de cierre

La conceptualización de la proporcionalidad constituye uno de los pilares importantes en la formación matemática de los alumnos en el C.B.U ya que permite ir construyendo modelos matemáticos de resolución aplicables a otras disciplinas, como la física, la química, la geografía, la biología y dentro de la misma matemática.

Recordemos que a partir del estudio de la relación entre dos magnitudes directamente proporcionales podemos introducirnos al desarrollo de las funciones y más específicamente a la función lineal. Se puede hacer esto desde una situación presentada en forma (oral o escrita), desde una tabla, desde un gráfico cartesiano o desde su expresión algebraica. En el camino hacia la conceptualización de la función se ponen en juego articulaciones entre los distintas representaciones, ya que una expresión algebraica permite anticipar la forma de la gráfica, al igual que una tabla, o un diagrama permite deducir la expresión algebraica.

Cada uno de estas formas o registros no constituyen por sí mismos la **función**, pero nos llevan hacia su conceptualización.

Los resultados analizados junto a los señalamientos explicitados, dan cuenta que aún es necesario revisar las prácticas docentes a partir de las dificultades de los alumnos, con la finalidad de optimizar la construcción del conocimiento matemático.