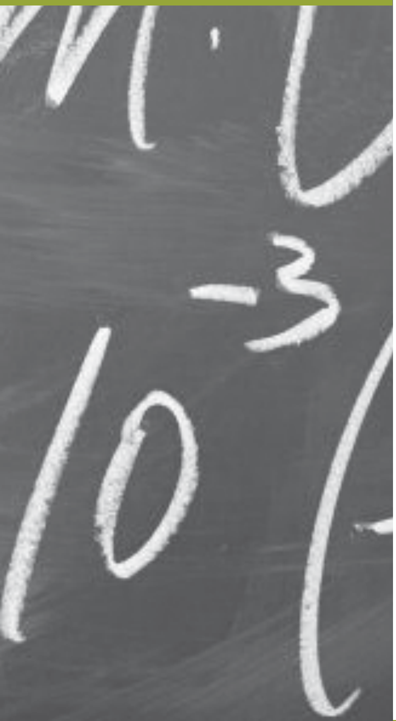
Ministerio de Educación
Presidencia de la Nación

DiNIECE
Dirección Nacional de Información y Evaluación de la Calidad Educativa



RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Secundaria-ONE 2007/2008
Pruebas de 2 /3 año y 5°/6° año Secundaria.

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Secundaria-ONE 2007/2008
Pruebas de 2°/3° año* y 5°/6° año Secundaria.

*9º Año del Sistema Educativo Argentino contando desde el primer año de la escuela primaria.

AUTORIDADES

Presidenta de la Nación
Dra. CRISTINA FERNÁNDEZ DE KIRCHNER

Ministro de Educación
Prof. ALBERTO ESTANISLAO SILEONI

Secretaria de Educación
Prof. MARÍA INÉS ABRILE DE VOLLMER

Subsecretario de Planeamiento Educativo
Prof. EDUARDO ARAGUNDI

Directora Nacional de Información
y Evaluación de la Calidad Educativa
Dra. LILIANA PASCUAL

COORDINADORA DE EQUIPOS PEDAGÓGICOS DE EVALUACIÓN
Y RELACIONES INTERJURISDICCIONALES:
Mg. Mariela Leones

ELABORADO POR:
Prof. Andrea Novembre

EQUIPO DEL ÁREA DE MATEMÁTICA:
Prof. Liliana Bronzina
Prof. Pilar Varela
Lic. Nora Burelli

LECTURA CRÍTICA:
Prof. Horacio Itzcovich

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN:
Karina Actis
Juan Pablo Rodriguez
Coralia Vignau

Agradecemos la lectura y los comentarios de:
Áreas Curriculares de la Dirección de Gestión Curricular del Ministerio de Educación.

ÍNDICE

Las pruebas de matemática evaluaron en el 2007 una muestra de estudiantes que finalizaban la Educación Secundaria o que cursaban 2°/3° año de ese nivel.
Las mismas tuvieron como finalidad determinar el rendimiento de los alumnos de diferentes jurisdicciones en relación con algunos contenidos del área.

¿CÓMO ESTUVIERON CONSTITUIDAS LAS PRUEBAS?

Es importante considerar que son pruebas masivas, es decir, se aplican a muestras muy grandes de alumnos y que, por lo tanto, tienen una estructura que les es propia. Un análisis puntual de las mismas puede complementar la información obtenida de las evaluaciones realizadas día a día por los docentes en su trabajo de aula.

Las pruebas estuvieron constituidas por 26 ítems cerrados o de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta cada uno, y cuatro ítems de respuesta abierta a desarrollar. Cada alumno debía responder las 30 preguntas.

La inclusión de ítems de respuesta abierta permitió evaluar los procesos que los alumnos desarrollaron para dar cuenta de un procedimiento o de una estrategia de resolución elegida y de su relación con la respuesta presentada.

Con el fin de atender especialmente al procedimiento de resolución y no solo al resultado, los ítems de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los docentes utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DINIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en la grilla de corrección: correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco (omitida).

Habiendo accedido a las respuestas dadas por los alumnos, hemos seleccionado algunas que por sus características, nos invitan a reflexionar no sólo sobre su nivel de conceptualización, sino también sobre sus posibilidades concretas de resolución en diferentes temas.

En el caso de los ítems abiertos nos aportan, además, una variedad de datos acerca de los recursos que los alumnos están en condiciones de utilizar en esta etapa de su escolaridad secundaria para describir los procedimientos utilizados en la resolución y la racionalidad desplegada, cuestión que aunque resulte compleja por estar vinculada a lo metacognitivo, da cuenta del tipo de trabajo matemático realizado en su trayectoria escolar.

Por ello, este informe tiene como propósito compartir con ustedes algunas de las situaciones que los alumnos tuvieron que resolver y una serie de comentarios y análisis realizados sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están en la base de los mismos.

Asimismo, aunque los fines y las características de esta prueba difieren en gran medida de los utilizados cotidianamente en las aulas, no dudamos puedan aportar información útil sobre las dificultades y logros más frecuentes en los alumnos, y al mismo tiempo, proveer algunas sugerencias para trabajar en clase, con el fin de enriquecer la tarea pedagógica, pudiendo ser adaptadas por los docentes a su contexto y a la realidad de sus alumnos y de su escuela.

LOS NIVELES DE DESEMPEÑO

El desempeño de los alumnos en matemática se agrupó en tres niveles para cada año evaluado: alto, medio y bajo.

Los mismos se han determinado a partir de criterios empíricos y pedagógicos, en relación con los rendimientos de los alumnos en la prueba. Cada uno de los niveles es inclusivo en relación con el inmediatamente inferior, es decir, en la medida en que un alumno está ubicado en un determinado nivel, tiene alta probabilidad de resolver con éxito las actividades del mismo y las de los inferiores a aquél.
De este modo, la discriminación de estos niveles facilita la comunicación de lo que los alumnos saben y pueden hacer.

A continuación analizaremos problemas que corresponden a los distintos niveles de desempeño de los alumnos del noveno año de su escolaridad y de Fin de Educación Secundaria de 2007.

NOVENO AÑO DE ESCOLARIDAD ANÁLISIS DE ÍTEMS CERRADOS

Con este objetivo, proponemos un problema correspondiente a cada uno de los niveles.

Nivel Alto

12 Un jugador de básquetbol convirtió 9 y erró 15 lanzamientos al aro. ¿Cuál fue el porcentaje de lanzamientos errados?

A) 62,5 %

B) 60 %

C) 37,5 %

D) 15 %

Respuestas

A)	29,55 %
B)	22,28 %
C)	17,02 %
D)	23,59 %

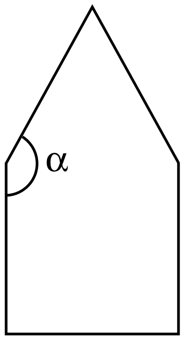
Omisiones 7,56 %

Se trata de determinar qué porcentaje representa 15 del total de tiros, que es 9 + 15 = 24, es decir, $\frac{15}{24} \times 100 = 62,5$. En este tipo de problemas, los alumnos suelen encontrar dificultades a la hora de decidir cuál es el total sobre el cual hallar el porcentaje. Estas dificultades se evidencian en la dispersión que se observa en los resultados, que están casi igualmente distribuidos entre las cuatro opciones.
Los porcentajes de alumnos que seleccionaron cada una de las opciones son los que aparecen en la tabla (A es la respuesta correcta).

Aunque la mayoría eligió la respuesta correcta, la gran dispersión es una muestra de la dificultad que este problema representó para los alumnos.

Nivel Medio

25 La figura está formada por un cuadrado y un triángulo equilátero.



El ángulo α mide

A) 120°

B) 150°

C) 180°

D) 360°

Para un alumno con experiencia en resolver problemas geométricos, debería tratarse de una situación casi rutinaria debido a los conocimientos básicos que requiere para su resolución. Se trata de poner en juego que el valor del ángulo buscado es el de un triángulo equilátero (60º) sumado al de uno de un cuadrado (90º). Se obtiene así el ángulo α de 90° + 60° = 150º.

Los porcentajes para cada una de las opciones son los del cuadro (la correcta es la B)

Respuestas

A)	30,82 %
B)	41,45 %
C)	14,25 %
D)	5,29 %

Omisiones 8,19 %

Sorprende que un problema que requiere de un bajo compromiso matemático a nivel de contenidos solo haya sido contestado correctamente por el 41% de los alumnos. Casi el 31% de los estudiantes seleccionaron a 120° como medida del ángulo buscado, probablemente a partir de considerar que los ángulos interiores de un triángulo miden 90° o tal vez, por haber trabajado casi siempre ángulos de 120° con esa "forma" o porque estimó que ese ángulo obtuso podría medir 120°.

Las opciones C y D seguramente hayan sido seleccionadas por aquellos alumnos que reconocen a los valores 180° y 360° como medidas "destacadas" en Geometría, pero no saben respecto de qué.

Nivel Bajo

5

Un vendedor ambulante compró una caja de 120 alfajores a $30. Vendió cada alfajor a $ 0,40. Para saber cuánto dinero va a ganar si vende todos los alfajores hace los siguientes calculos:

1° cálculo: 30 : 120 = 0,25
2° cálculo: 0,40 - 0,25 = 0,15
3° calculo: 0,15 x 120 = 18

¿Qué averiguó el vendedor cuando hizo el 2° cálculo?

A) La cantidad de alfajores.

B) Lo que le costó cada alfajor.

C) Lo que gana con cada alfajor.

D) La cantidad de alfajores que vende.

Respuestas

A)	4,80 %
B)	17,50 %
C)	66,51 %
D)	7,19 %

Omisiones 4 %

La resolución de este problema requiere de la interpretación del significado de cada cálculo en términos del contexto del problema. Se trata de una situación no habitual para los alumnos, debido a que no son ellos, en este caso, los encargados de encontrar cálculos para resolver el problema, sino que tienen que encontrarle sentido a cálculos propuestos por otro.

Un recorrido posible para los alumnos es realizar las siguientes interpretaciones:

- Si $30 es el precio al que compró 120 alfajores, entonces $30 \div 120 = 0,25$ es el precio de cada uno.
- 0,40 – 0,25 = 0,15 es la diferencia entre el precio de venta y el precio de costo, o sea la ganancia por alfajor.
- 0,15 × 120 = 18 es la ganancia para los 120 alfajores.

Los porcentajes que seleccionaron cada una de las respuestas proporcionadas figuran en la tabla (la correcta es la C).

Cerca de $\frac{2}{3}$ de los alumnos respondió correctamente al ítem.

Es interesante observar que el 17,50%, un porcentaje no desdeñable, considera que 0,40 – 0,25 = 0,15 es el precio de cada alfajor. Estos alumnos confunden la ganancia con el precio unitario.

INFORME DE ÍTEMS ABIERTOS

Introducción

A partir del trabajo desplegado por los alumnos en los problemas, las estrategias que explicitan, las explicaciones que brindan, es posible extraer información acerca de su forma de trabajo, por un lado, y de la que se propone en las aulas, por el otro. Los estudiantes, a través de su trabajo, no solo son portavoces de sus posturas y creencias, sino también de las de sus docentes, de la cultura matemática que han ido construyendo a lo largo de su escolaridad.

Nuestro objetivo en este trabajo es obtener datos referidos a las producciones de los alumnos y herramientas que permitan pensar en cómo mejorar la calidad de sus aprendizajes.

PROBLEMA: LA PROPORCIONALIDAD

El término proporcionalidad hace referencia a un campo de problemas provenientes de la vida social o de situaciones físicas en las que intervienen magnitudes proporcionales. La proporcionalidad entre las magnitudes resulta de una convención social (para los problemas de la vida cotidiana) o de una ley física que se deduce a partir de observaciones. En ambos casos, la resolución del problema requiere del pasaje de las magnitudes a las cantidades y el recurso a un modelo matemático.
Existen al menos dos modelos matemáticos que permiten expresar la proporcionalidad directa simple:
• La conservación de razones y las propiedades de las proporciones.
Si x y f(x) representan elementos correspondientes a través de una función de proporcionalidad de constante k y $x \neq 0$, entonces se verifica que

$$\frac{f(x)}{x} = k$$

La relación anterior es verdadera para todo par de valores que se relacionan, luego si $x_1 \neq 0$:

$$\frac{f(x_1)}{x_1} = k \text{ , de donde resulta que } \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x_1)}{x_1}$$

Finalmente, la última igualdad es una proporción para la cual podrán utilizarse todas sus propiedades.
• Función lineal afín (es decir, con ordenada al origen 0) y sus propiedades:
Si x e y son dos elementos del dominio de una función de lineal afín o de proporcionalidad y t un número real, entonces,

- $f(t.x) = t.f(x)$
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Una estrategia de resolución, que proviene de los anteriores, es la regla de tres simple. Sin embargo, en la mayoría de los casos en los que se la utiliza, se lo hace de modo algorítmico, sin vincularse ni basarse en las propiedades de la proporcionalidad.
Es así que muchos alumnos utilizan la regla de tres simple de manera indiscriminada, para resolver todo tipo de problemas, donde hay relaciones de proporcionalidad o donde no las hay. Si el acceso a este conocimiento no exigió explicaciones por parte de los alumnos, es esperable que se queden con la técnica y no con los fundamentos que le dieron origen.

La proporcionalidad implica un trabajo con la multiplicación y la división, lo cual merece una reflexión. Es posible sumar o restar magnitudes de la misma naturaleza, la suma es una operación interna a una magnitud. Pero el producto de dos magnitudes es de otra magnitud. La razón de dos magnitudes de naturaleza diferente (razón externa) determina otra magnitud, mientras que la razón entre magnitudes de igual naturaleza (razón interna) es un escalar. En todos los casos, el producto es una operación "externa". Las magnitudes condicionan el sentido de las operaciones.

Aunque la noción de función lineal es útil, no es necesario conocerla explícitamente para resolver problemas de proporcionalidad. Sin embargo, es necesario reconocer que el problema es de proporcionalidad, en donde el trabajo matemático involucra dos momentos:

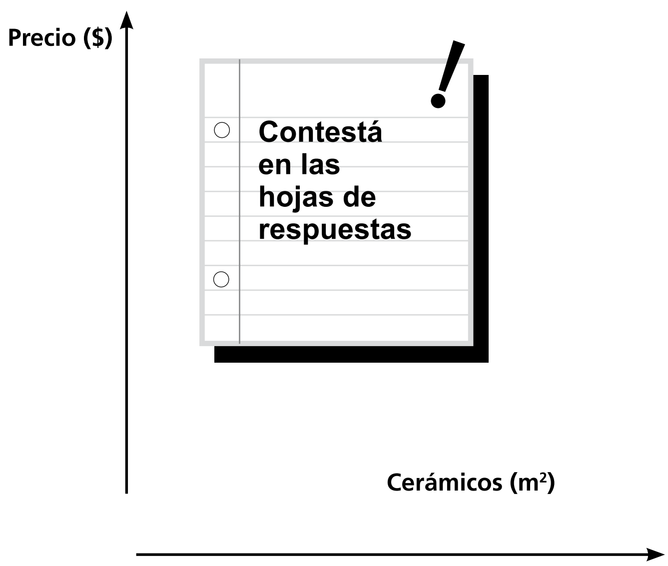
1) Reconocer que la situación es de proporcionalidad.
2) Utilizar técnicas justificadas por las propiedades de las funciones lineales, implícita o explícitamente, para la resolución.

Aunque la primera etapa puede pasar desapercibida para un adulto que domina el tema, no resulta así para un alumno que está en vías de aprenderlo.

El problema que se presentó en la evaluación es el siguiente.

12 La tabla muestra cantidades de metros cuadrados de cerámicos y su precio. Completá los casilleros en blanco y representá todos los valores en los ejes cartesianos. Mostrá cómo lo resolvés.

Cerámicos (m^2)	**Precio ($)**
5	200
	120
12	



Este problema puede encararse desde diferentes lugares, en función de los conocimientos disponibles y prácticas matemáticas habituales para quien lo resuelve. Bien sabemos que puede sostenerse desde una resolución meramente algorítmica (regla de tres) hasta una donde se apliquen las relaciones que provienen del concepto de proporcionalidad.

Para los que completan la tabla a partir de la regla de tres, el valor que va en cada casillero se hallará a partir de resolver los siguientes cálculos:

Cantidad de cerámicos (en m^2) correspondientes a $120	Precio correspondiente a 12 m^2 de cerámicos
200 ____ 5 120 ___ $\frac{120 \times 5}{200} = 3$	5 _____200 12____ $\frac{12 \times 200}{5} = 480$

La utilización de la regla de tres sin ninguna otra mediación no permite una anticipación por parte de los alumnos. Como dijimos, se reduce a la simple aplicación de un algoritmo. La mayoría de los estudiantes aplica una fórmula sin saber qué está calculando ni por qué lo hace. El uso de esta regla suele venir acompañado del alumno diciendo, por ejemplo, "si 5 m^2 cuestan $200 entonces 12 m^2 cuestan "esto por esto dividido esto" (mientras señalan los números que han escrito)". Y aquí comienza el primer problema, pues no suelen "recordar" cuáles son los números que hay que multiplicar y por cuál hay que dividir. Claramente, no se trata de recordar algo que se sabía y se olvidó, sino que se olvidó porque se sabía de memoria. El "saber de memoria", en matemática, equivale -en la mayoría de los casos- a no tener acceso a las razones y el sentido que dan sustento a un saber o conocimiento. *(1)*

Como contraposición a la regla de tres se encuentran los procedimientos basados en las relaciones que provienen del concepto de proporcionalidad.
Uno de ellos puede consistir en lo siguiente:

Si 5 m^2 cuestan $200 entonces
2,5 m^2 cuestan $100 (hallando la mitad de ambos valores) y
0,25 m^2 cuestan $10 (calculando la décima parte de ambos valores),
0,50 m^2 cuestan $20 (duplicando ambos valores)

Luego, con $120 se pueden comprar 2,5 m^2 + 0,50 m^2 = 3 m^2 de cerámicos.
Como 12 es el cuádruple de 3, el precio a pagar por 12 m^2 será el cuádruple del precio por 3 m^2, o sea 4 x 120 = $480.

Se trata de una resolución que se apoyó en dos propiedades:
- Si se multiplica la cantidad de cerámicos por un número, el precio se multiplica por el mismo valor.
- A la suma de dos cantidades de cerámicos les corresponde la suma de sus respectivos precios.

Otra forma de resolución consiste en hallar la constante de proporcionalidad:
Si 5 m^2 cuestan $200 entonces

$$\frac{5m^2}{5} = 1m^2 \text{ cuesta } \frac{\$200}{5} = \$40$$

(1) Queremos distinguir el conocimiento del saber. Por este último entendemos el que está vinculado con una institución social, por ejemplo la de los matemáticos. El conocimiento, en cambio, se asocia a un individuo.

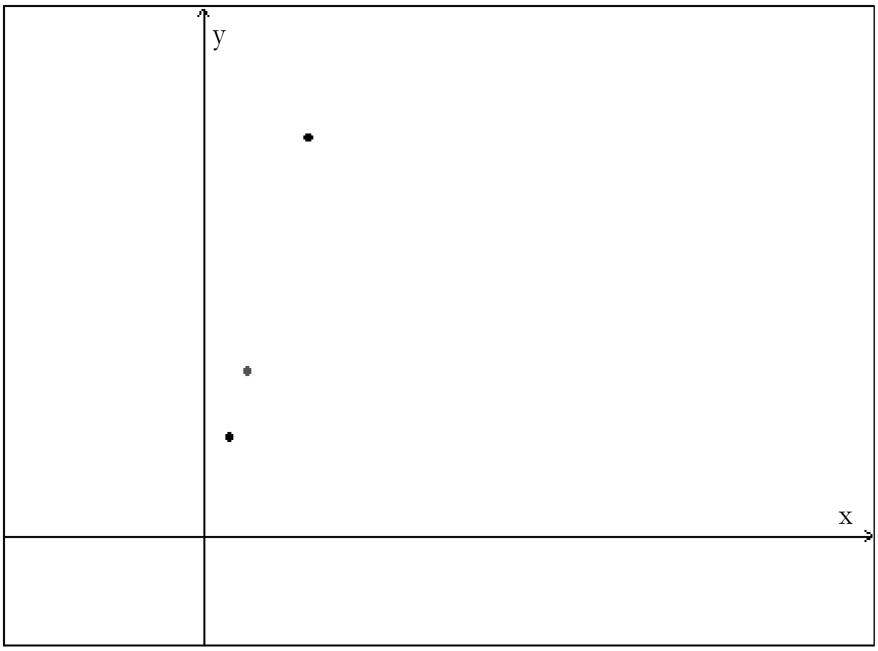
Para saber la cantidad de metros cuadrados de cerámicos que pueden comprarse con $120 basta con usar la propiedad de la constante de proporcionalidad, es decir, si se divide el precio por la constante se obtiene la cantidad de metros cuadrados que se pueden comprar:

$$\frac{120}{40} = 3m^2$$

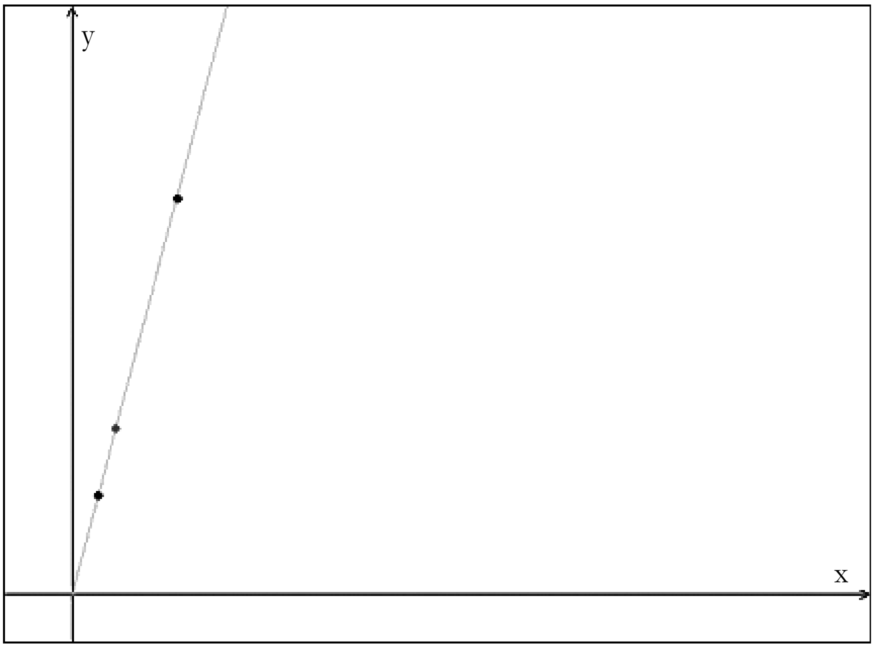
El precio que corresponde por 12 m^2 de cerámicos es de $12 x 40 = $480.
Luego, la tabla completa resulta del siguiente modo

Cerámicos (m^2)	Precio ($)
5	200
3	120
12	480

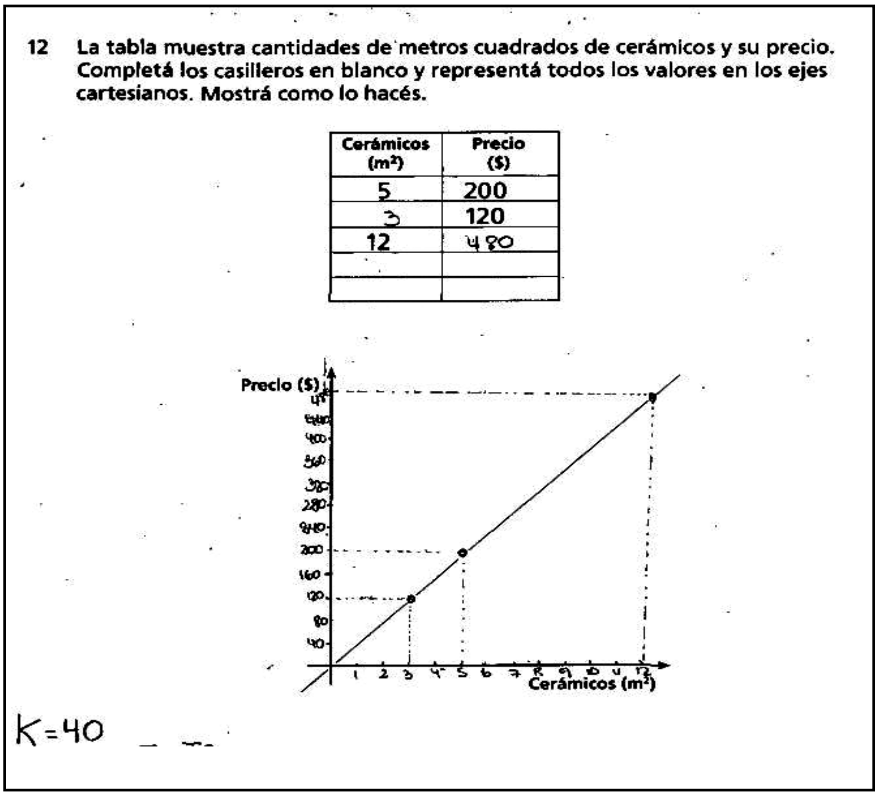
El problema abre la posibilidad de que los alumnos solo representen los tres puntos con los que se trabajó o que busquen más. En ambos casos lo que se busca ver es si los estudiantes pueden vincular un marco funcional o aritmético con el gráfico.
En el sistema de coordenadas cartesianas figuran los tres puntos:



Aunque también es muy probable que muchos alumnos unan los puntos con una semirrecta o una recta:

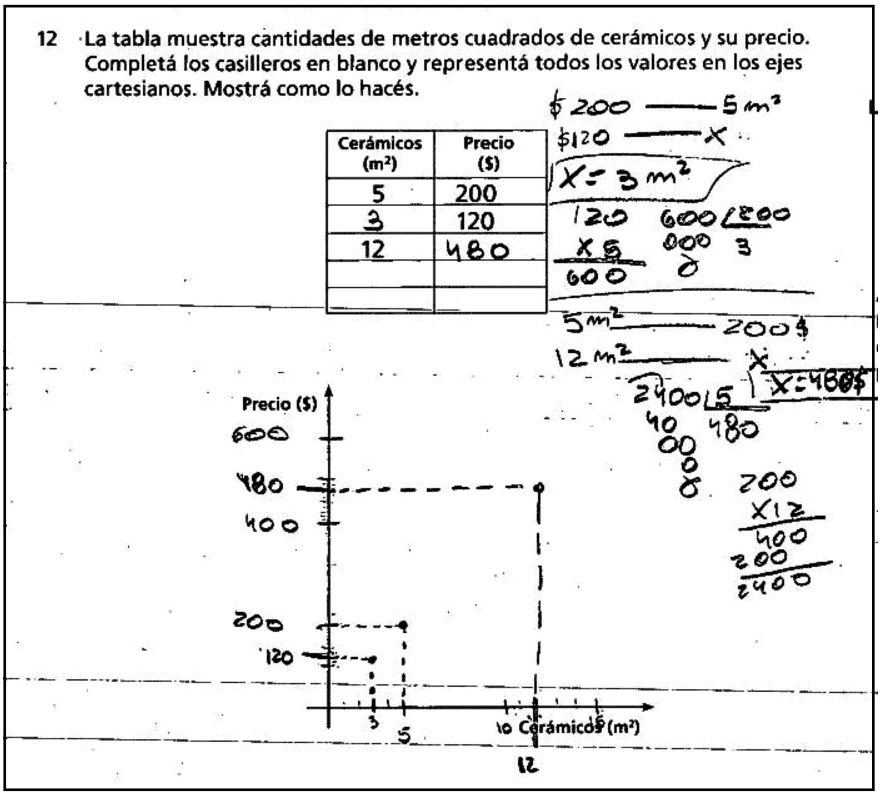


Los siguientes son dos ejemplos de resoluciones correctas de alumnos, una con un gráfico de puntos aislados y otra con una recta.



12 La tabla muestra cantidades de metros cuadrados de cerámicos y su precio. Completá los casilleros en blanco y representá todos los valores en los ejes cartesianos. Mostrá como lo hacés.

Cerámicos (m^2)	Precio ($)
5	200
3	120
12	480



12 La tabla muestra cantidades de metros cuadrados de cerámicos y su precio. Completá los casilleros en blanco y representá todos los valores en los ejes cartesianos. Mostrá como lo hacés.

Cerámicos (m^2)	Precio ($)
5	200
3	120
12	480

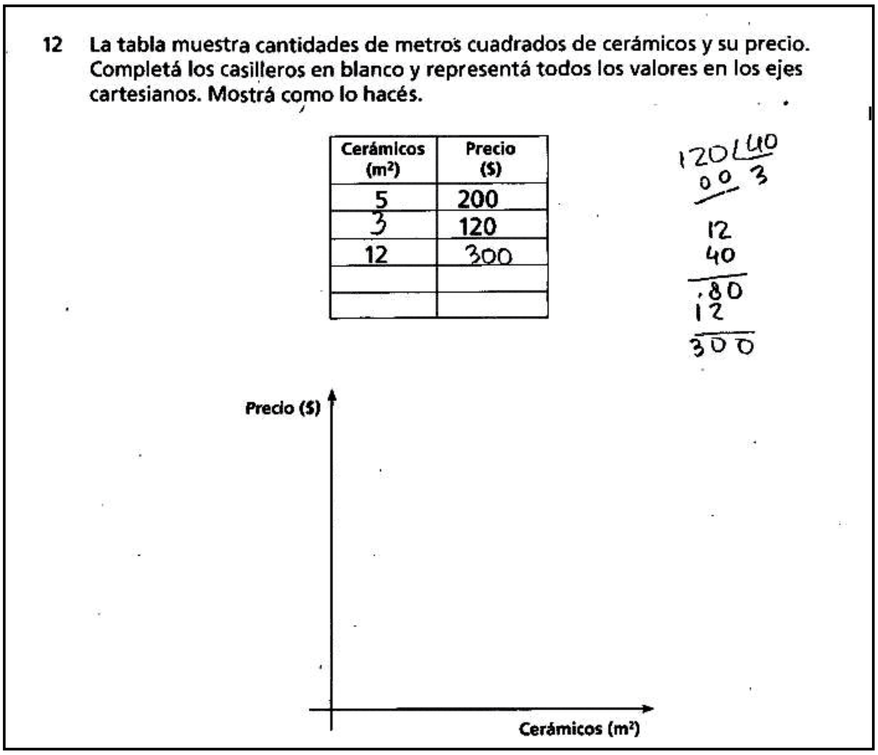
$200 —— 5 m²
$120 —— X
X = 3 m²

5 m² —— 200 $
12 m² —— X
X = 480 $

Ejemplo 1

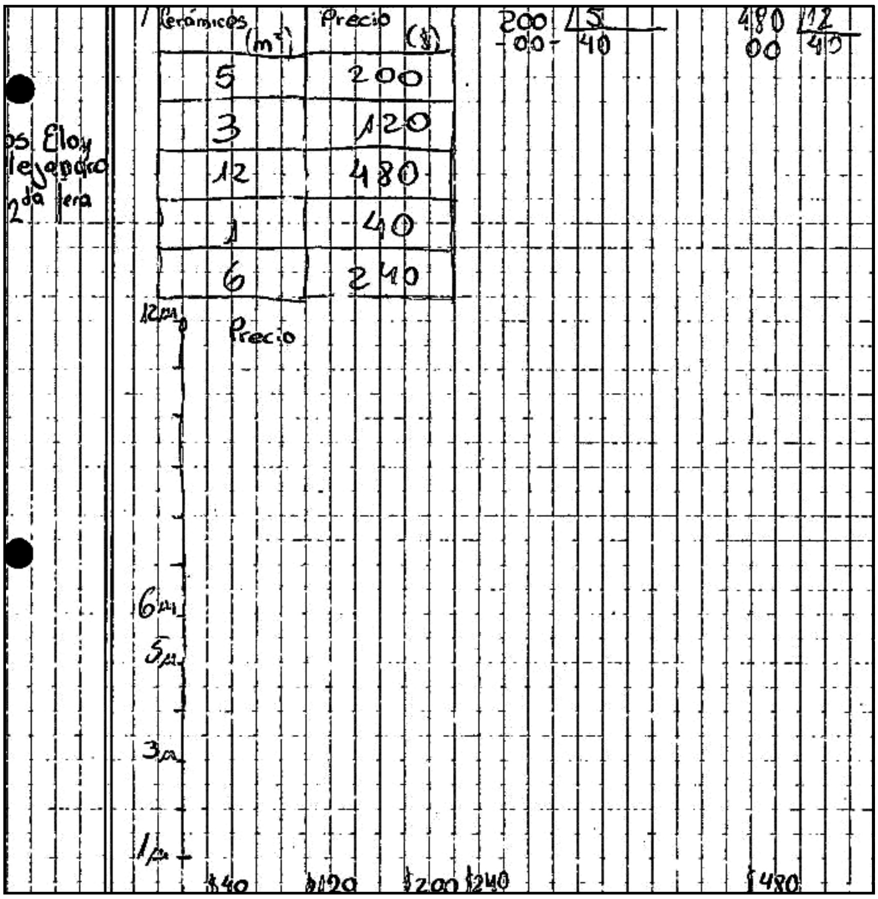
A partir del análisis de las resoluciones de los estudiantes hemos constatado la dificultad que muchos de ellos presentan a la hora de producir un gráfico que muestre la relación entre la cantidad de cerámicos y su precio, representado en este caso a través de pares de números.

Encontramos alumnos que ni siquiera intentan hacerlo, a pesar de haber encontrado correctamente alguno de los valores faltantes de la tabla, como en los dos casos siguientes:



12 La tabla muestra cantidades de metros cuadrados de cerámicos y su precio. Completá los casilleros en blanco y representá todos los valores en los ejes cartesianos. Mostrá como lo hacés.

Cerámicos (m^2)	Precio ($)
5	200
3	120
12	300

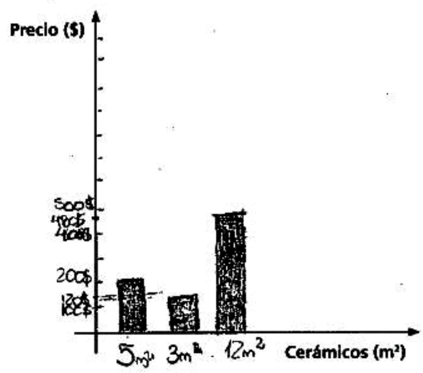


También hemos encontrado alumnos que, habiendo completado correctamente la tabla, luego producen un gráfico semejante al de barras. El haber elegido tal gráfico para representar esta situación muestra una decisión que es, al menos, extraña. Estas producciones nos informan de la escisión entre las resoluciones aritméticas y funcionales o gráficas. Es posible que estos alumnos no hayan tenido las oportunidades suficientes de enfrentarse a problemas donde los gráficos eran herramientas necesarias para resolverlos. Producirlos a pedido del docente no permite aprender para qué sirven ni cuándo usarlos.

Otra cuestión que vale preguntarse es qué aporta un gráfico al estudio de la situación planteada. ¿En qué radica su importancia? ¿Para qué es necesario? ¿En qué casos se unen o no los puntos?

12 La tabla muestra cantidades de metros cuadrados de cerámicos y su precio. Completá los casilleros en blanco y representá todos los valores en los ejes cartesianos. Mostrá como lo hacés.

Cerámicos (m^2)	Precio ($)
5	200
3	120
12	480

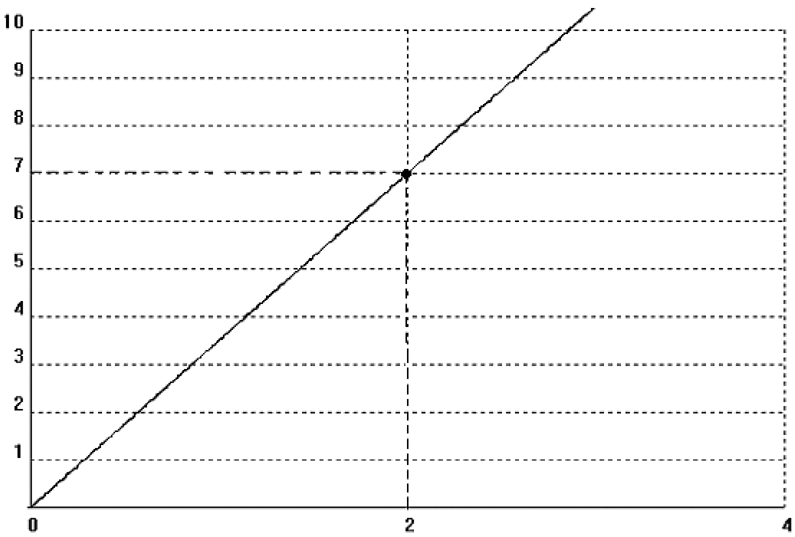


¿Qué tipo de problemas favorecen la interacción entre las tablas de proporcionalidad, el concepto de proporcionalidad y los gráficos?

Para que los alumnos puedan involucrarse en el estudio de las relaciones entre gráficos, tablas y el concepto de proporcionalidad es posible proponer un problema donde el gráfico resulte necesario o donde a partir de él surja la necesidad de hallar valores de una de las variables a partir del valor de la otra.

Proponemos analizar el siguiente problema:

En el siguiente gráfico se representa la relación entre la cantidad de manzanas y el precio a pagar por ellas. En el eje de abscisas se representan la cantidad de manzanas (en kg), mientras que en el de las ordenadas, el precio que se paga por ellas, en pesos.



a) ¿Cuál es el precio de 3 kg de manzanas?
b) ¿Cuántos kilos de manzanas pueden comprarse con $24,50?
c) En otro negocio ofrecen 12 kilos de manzanas por $39. ¿En cuál de los negocios conviene comprarlos?

El gráfico permite determinar el precio correspondiente a 2 kg de manzanas, que es de $7. No hay otro valor que pueda leerse con precisión del gráfico, lo que lleva a la necesidad de resolver el problema sin el apoyo del mismo. El gráfico es un soporte, pero no determina la solución al problema.

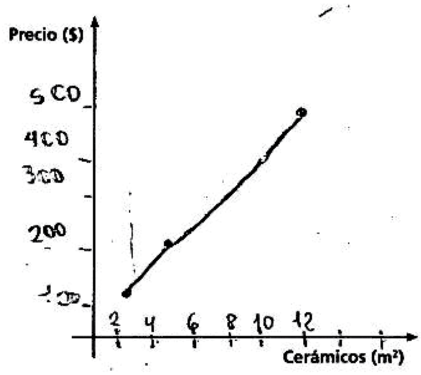
Ejemplo 2
Hay casos en que los alumnos utilizan correctamente los conocimientos correspondientes a la proporcionalidad pero, sin embargo, cometen errores importantes en el uso de algoritmos de cálculo.

12 La tabla muestra cantidades de metros cuadrados de cerámicos y su precio. Completá los casilleros en blanco y representá todos los valores en los ejes cartesianos. Mostrá como lo hacés.

Cerámicos (m^2)	Precio ($)
5	200
3	120
12	4813

3 — 120
12 — x

120
× 12
240
120
1440 | 3
4813
24
04
10
1



Este estudiante, al resolver la división 1440 ÷ 3, utiliza dos veces el 4 del 40. Su cociente es 4813 en lugar de 480, pero lo deja. No parece sospechar que ese resultado no es posible, que 3 veces 4813 está muy lejos de 1440. Tres veces 4813 nunca puede dar menos que 4813.

¿Por qué sucede esto?

El cálculo algorítmico forma parte del conjunto de estrategias de cálculo que la escuela primaria debe comunicar, sin embargo, las investigaciones didácticas no proponen la adquisición de una serie de pasos mecánicos sino un trabajo de exploración y reflexión que apunte a considerar a los algoritmos como objeto de estudio, a develar su funcionamiento y las propiedades y descomposiciones que ocultan. De ese modo, los algoritmos resultan una prolongación del trabajo de razonamiento que se realiza con el cálculo mental.

Una de las características que adquiere el trabajo descripto como una base para el control por parte de los alumnos de su tarea es la estimación. Si no es capaz de estimar el orden de magnitud del resultado de un cálculo a realizar, entonces no tendrá herramientas para decidir si lo que hizo es correcto o no.

En el caso de la división, la estimación tiene sus peculiaridades. Es posible saber la cantidad de dígitos que tendrá el cociente antes de hacer la división, lo que constituye un dato muy importante.

Por ejemplo, en el caso del cálculo que intentaba resolver nuestro alumno, $1440 \div 3$, es posible razonar del siguiente modo:

$3 \times 10 = 30$, luego el cociente es mayor que 10 pues $1440 > 30$.
$3 \times 100 = 300$, luego el cociente es mayor que 100 pues $1440 > 300$.
$3 \times 1000 = 3000$, luego el cociente es menor que 1000 pues $1440 < 3000$.

Por lo tanto, el cociente de la división $1440 \div 3$ es mayor que 100 y menor que 1000. Como todos los números que verifican esta condición tienen 3 dígitos, también los tendrá el cociente. Este último dato nos informa que 4813 no puede ser el cociente de la división pues tiene más de 3 dígitos.

El trabajo reflexivo sobre los algoritmos permite a los alumnos desarrollar una mejor comprensión y ejercer un mayor control sobre su funcionamiento.

PROBLEMA: ÁREAS, PORCENTAJES Y FRACCIONES

En relación al trabajo de los alumnos con las fracciones y los porcentajes, generalmente se observa que ellos no saben el por qué de lo que hacen y se quedan con el cómo. Como consecuencia de ello, ejecutan reglas sobre objetos matemáticos que apenas conocen.

Todos hemos podido constatar que las representaciones que los alumnos construyen en torno a la noción de fracción son muy precarias. Pero esas representaciones son, generalmente, el producto de las situaciones a las que los alumnos son expuestos en sus clases. Los tipos de problemas que se presentan y el trabajo que se hace sobre ellos tendrán una incidencia central en el mapa de las representaciones que los alumnos van construyendo.

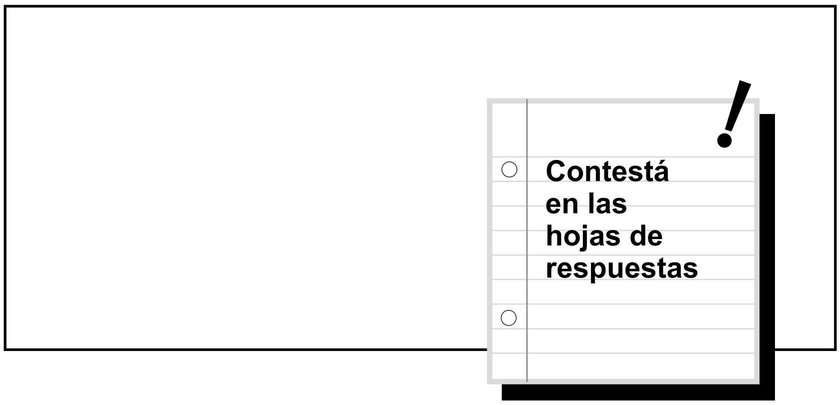
Sin embargo, un análisis a grandes rasgos del trabajo que se realiza habitualmente en clase con este concepto, nos aporta los primeros datos. Se hace un trabajo importante en torno al fraccionamiento (que la mayoría de los alumnos evoca a la hora de preguntarles por las fracciones, diciendo, por ejemplo "ah, sí… lo de las pizzas") para rápidamente abocarse a los cálculos con fracciones.

A la luz de los resultados obtenidos por los alumnos, creemos que es hora de interrogarnos acerca de la eficacia y la pertinencia de las decisiones didácticas.
¿No sería mejor destinar más tiempo a explorar a la fracción como número antes de lanzarse a situaciones de cálculo? Estudiar el fraccionamiento en su diversidad, sin restringirse al ejemplo de la pizza, debería ser uno de los objetivos sobre los que tendría que centrarse el aprendizaje de las fracciones.

Además, las relaciones entre fracciones, decimales, razones, porcentajes, probabilidades, proporcionalidad, deberían ser recorridas en uno y otro sentido. De ese modo, éstas no quedarán a cargo de los alumnos sino que formarán parte del programa de enseñanza.

El problema propuesto a los alumnos es el siguiente:

13



El rectángulo anterior es el plano de un local en el que Pedro va a instalar su negocio.
Dividí el plano del local de manera que el depósito ocupe la mitad de la superficie. De lo que queda el 25% lo ocupará la administración y el resto se dedicará al sector de ventas.
Hacé las divisiones correspondientes en el plano del local y escribí “Depósito”, “Administración” y “Ventas” en los lugares que destinás para cada uno.

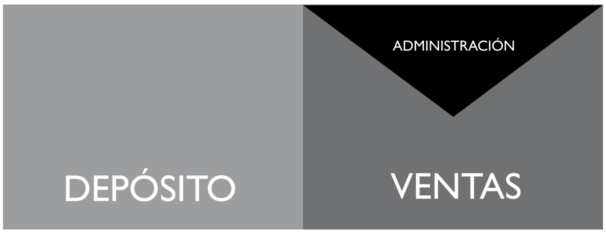
La situación plantea varios niveles de análisis.

- Hay una relación entre porcentaje y fracción de un entero que es necesario traducir. Si bien se trata de 25%, que suele ser uno de los valores conocidos por los alumnos, muchas veces ellos apelan a la equivalencia “estudiada” de que 25% es $\frac{25}{100}$, que en este caso no aporta demasiado para hacer el dibujo si no se simplifica. Dividir un rectángulo en 100 partes iguales es una tarea imposible, aun para los que saben qué hacer.

- No se trata de 25% del total del rectángulo, sino de 25% “de lo que queda” y aquí es necesaria una nueva interpretación por parte del alumno. ¿Qué es lo que queda? ¿Cuánto queda? ¿Cómo es su 25%?

- Finalmente, se trata de una situación que tiene varias formas de ser resuelta. No hay una única manera de marcar la mitad del rectángulo ni la cuarta parte de lo que queda. No necesariamente este hecho planteará dudas a los alumnos, pero es interesante para tenerlo en cuenta a la hora de trabajarlo (en caso de que fuera un problema para el aula).

Hay diferentes formas de marcar la mitad del rectángulo y, una vez hecho esto, la cuarta parte de la otra mitad también admite varias maneras de ser dibujada. En los siguientes dibujos presentamos algunas posibles:



En el caso siguiente se ponen en juego propiedades de las figuras que no saltan a la vista. Que el depósito representa la mitad del rectángulo es claro, y la mayoría de los alumnos acepta este hecho sin cuestionamientos. Desde la escuela primaria se "sabe" que la diagonal de un rectángulo lo divide en dos triángulos congruentes, por lo que sus áreas son iguales. Aunque los estudiantes no puedan explicitar esta propiedad, pueden usarla.

Lo que no resulta nada evidente es si el triángulo que representa el sector de administración es efectivamente $\frac{1}{4}$ de lo que queda y el de ventas, $\frac{3}{4}$. La percepción y la intuición, en estos casos, no son de mucha ayuda. Será necesario apelar a otros conocimientos.

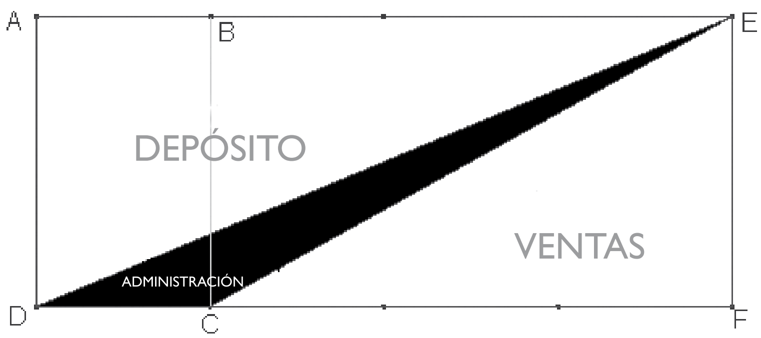
¿Cómo estar seguros de que el área del triángulo que representa a la zona destinada a la administración realmente es la cuarta parte de la mitad (o un octavo del total)?
Quien está acostumbrado a trabajar con fórmulas puede intentar hacerlo. Si se supone que la base del rectángulo mide b y su altura h, su área es A= b.h . Pero el triángulo tiene la cuarta parte de la base $\frac{1}{4}b$ y la misma altura que el rectángulo, luego su área es,

$$A_1 = \frac{\frac{1}{4}b \cdot h}{2} = \frac{1}{8}b \cdot h$$

que es la octava parte del área del rectángulo.
También podría haberse expresado el área como,

$$A_1 = \frac{\frac{1}{4}b \cdot h}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{b \cdot h}{2}$$

que representa la cuarta parte del área del triángulo indicado con Depósito.
El problema también puede pensarse íntegramente desde un punto de vista geométrico, de la siguiente manera:

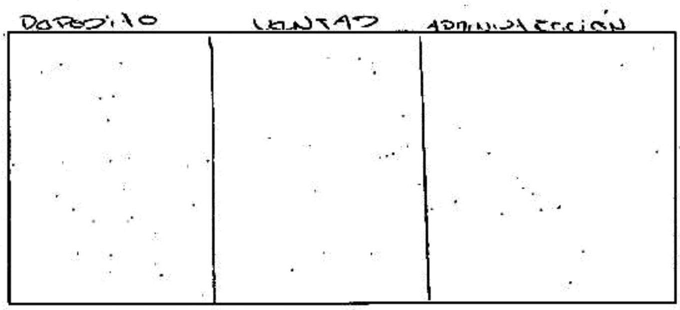


La base del rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ es la cuarta parte de $\overline{DF}$ y su altura es la misma, luego, el área del rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ es un cuarto del área del $\overset{\square}{AEFD}$. Otra manera de "ver" que la relación efectivamente es esa es a partir de analizar que el rectángulo $\overset{\square}{ABCD}$ entra 4 veces en el $\overset{\square}{AEFD}$, por lo que el área debe ser su cuarta parte.
Por otro lado, el triángulo $\overset{\triangle}{DCE}$ tiene la misma base y altura que $\overset{\square}{ABCD}$, por lo que su área es la mitad de la del rectángulo. Como el área del $\overset{\square}{ABCD}$ es un cuarto del área del $\overset{\square}{AEFD}$, entonces el área del triángulo $\overset{\triangle}{DCE}$ es un octavo del área del rectángulo $\overset{\square}{AEFD}$.

ANÁLISIS DE RESPUESTAS DE ALUMNOS AL ÍTEM

Ejemplo 1

13

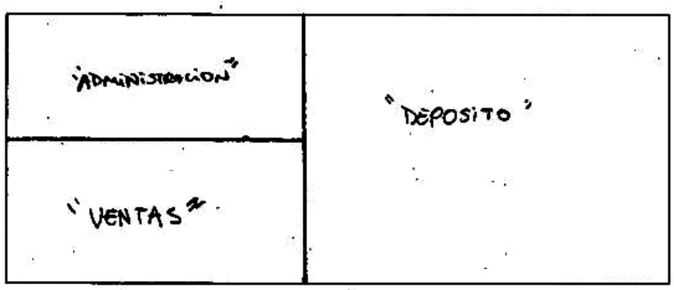


El rectángulo anterior es el plano de un local en el que Pedro va a instalar su negocio.
Dividí el plano del local de manera que el depósito ocupe la mitad de la superficie. De lo que queda el 25% lo ocupará la administración y el resto se dedicará al sector de ventas.
Hacé las divisiones correspondientes en el plano del local y escribí "Depósito", "Administración" y "Ventas" en los lugares que destinás para cada uno.

Este alumno propone una resolución que, desde un punto de vista probabilístico puede interpretarse como "falta de información". Frente a ningún dato que lo niegue, se supone que los eventos son equiprobables. En este caso, el estudiante asignó $\frac{1}{3}$ del total a cada parte, como si no hubiese tenido otro dato que lo negara.

Ejemplo 2

13

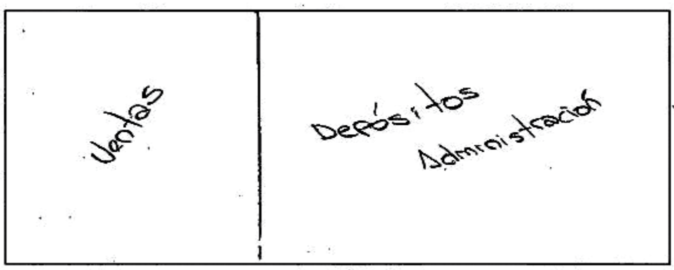


El rectángulo anterior es el plano de un local en el que Pedro va a instalar su negocio.
Dividí el plano del local de manera que el depósito ocupe la mitad de la superficie. De lo que queda el 25% lo ocupará la administración y el resto se dedicará al sector de ventas.
Hacé las divisiones correspondientes en el plano del local y escribí "Depósito", "Administración" y "Ventas" en los lugares que destinás para cada uno.

El alumno que realiza la resolución que figura arriba identifica la mitad que corresponde al Depósito, que la mayoría de los estudiantes pudo hacer. En cuanto a la parte que corresponde a Administración, dibuja 25% del total y no de lo que queda, que sería el 25% de la mitad. Al hacer esto, lo que resta ya no es el 75% para Ventas, sino un 25% (del total, en este caso).

Se nota en este alumno una falta de control sobre su producción. Si Administración es 25%, Ventas debería ser 75%. Aunque esto no pueda medirse en forma exacta, al menos tendría que poder observarse una diferencia a simple vista.

Ejemplo 3

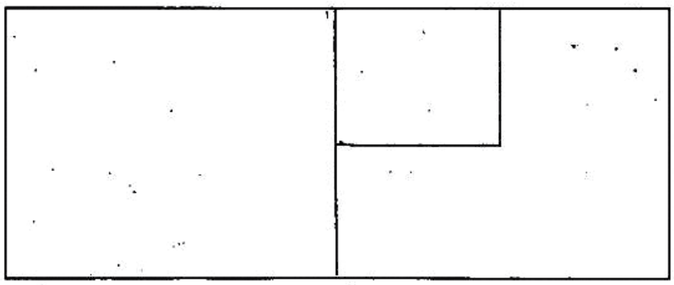


13

El rectángulo anterior es el plano de un local en el que Pedro va a instalar su negocio.
Dividí el plano del local de manera que el depósito ocupe la mitad de la superficie. De lo que queda el 25% lo ocupará la administración y el resto se dedicará al sector de ventas.
Hacé las divisiones correspondientes en el plano del local y escribí "Depósito", "Administración" y "Ventas" en los lugares que destinás para cada uno.

Luego de marcar aproximadamente la mitad que corresponde a Ventas, este alumno solo anota los nombres de los otros dos sectores sin hacer las divisiones.

Ejemplo 4



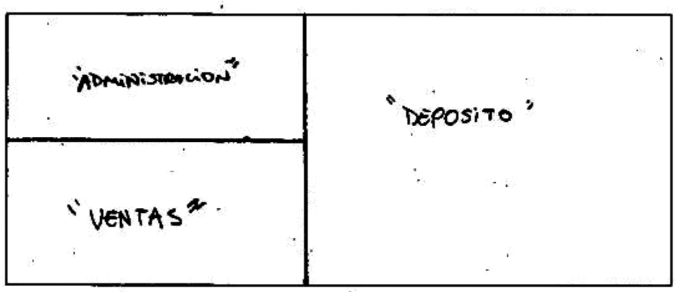
13

El rectángulo anterior es el plano de un local en el que Pedro va a instalar su negocio.
Dividí el plano del local de manera que el depósito ocupe la mitad de la superficie. De lo que queda el 25% lo ocupará la administración y el resto se dedicará al sector de ventas.
Hacé las divisiones correspondientes en el plano del local y escribí "Depósito", "Administración" y "Ventas" en los lugares que destinás para cada uno.

En este caso el alumno produce las divisiones correctas pero no indica cuál corresponde a cada categoría.

Ejemplo 5

13



El rectángulo anterior es el plano de un local en el que Pedro va a instalar su negocio.
Dividí el plano del local de manera que el depósito ocupe la mitad de la superficie. De lo que queda el 25% lo ocupará la administración y el resto se dedicará al sector de ventas.
Hacé las divisiones correspondientes en el plano del local y escribí "Depósito", "Administración" y "Ventas" en los lugares que destinás para cada uno.

Si bien las divisiones son correctas, el alumno no logra ubicar correctamente todas las categorías. Este estudiante parece manejar la relación entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$, pero no interpretó o no supo representar que se trataba de la cuarta parte de la mitad.

¿Qué sucede con el cálculo de áreas en la escuela?

Los cálculos de áreas forman parte de los programas escolares desde hace mucho tiempo, tanto en la escuela primaria como media. El trabajo habitual consistía (y consiste) en el uso de fórmulas para calcular áreas de diferentes figuras. Como contenido previo se definen las diferentes figuras asegurándose de que los alumnos las reconozcan. Es decir que el trabajo con estos objetos se limitaba a reconocerlos para luego calcular sus áreas o perímetros.

Las fórmulas, expresadas con letras, son un medio de cálculo: en ellas se reemplazan los valores de las medidas de los lados o alturas necesarios, se hace el cálculo que la fórmula plantea y su resultado es el área. No hay en este tipo de tarea un trabajo sobre por qué el área se obtiene de esta manera y no de otra.

Desde nuestro punto de vista, este tipo de problemas contiene muy poco trabajo realmente geométrico. Creemos que las figuras, en este tipo de trabajo, son una "excusa" para trabajar en aritmética, en álgebra o en funciones, pero no se llega a desarrollar un razonamiento de tipo geométrico.

Sostenemos que hay otra manera de trabajar sobre el cálculo de áreas que permite a los alumnos entender algunas relaciones importantes que con el uso de fórmulas se pierde. No queremos decir que no hay que trabajar con fórmulas. La idea es que las

fórmulas son otro de los aspectos a desarrollar, pero ciertamente no el único.
Saber las propiedades de los cuadriláteros también permite trabajar en el cálculo de áreas de estas figuras.

Algunas propuestas de trabajo en el aula

Pensamos que es necesario exponer a los alumnos a problemas donde los cálculos con fórmulas no les sean útiles para que necesiten movilizar sus conocimientos sobre las propiedades de las figuras, como el siguiente:

En el rectángulo ABCD de la figura, elegí un punto cualquiera sobre el lado AB y unilo con los vértices C y D, formando un triángulo.

¿Qué parte del área del rectángulo representa el área del triángulo?

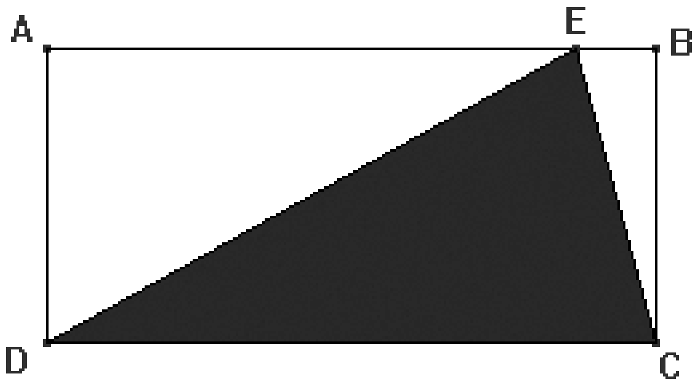
Si se cambia la posición del punto que se eligió sobre el lado AB, ¿qué sucede con el área del triángulo que se obtiene?

¿Es posible responder esta pregunta para cualquier triángulo que dibuje? ¿Y si se cambia el rectángulo por otro?

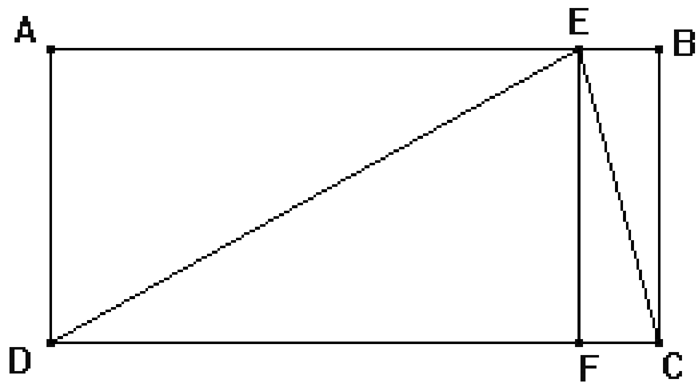
El problema plantea una generalidad, ya que no se especifica nada acerca del punto a elegir. Esto puede llevar a algunos alumnos a pensar que faltan datos, ya que ni siquiera se presentan medidas.

La elección de la ubicación del punto es importante. Si se lo elige en los alrededores del punto medio del segmento AB es probable que se llegue a una conclusión "mirando" el dibujo. Pero lo que se busca es tener certeza de cuál es la relación entre las áreas, independientemente de lo que se "vea". Por esto, según el proyecto de generalidad de quien resuelve el problema, el punto estará en lugares "extremos". Si no fuera el caso, será tarea del docente proponer lugares no convencionales para ubicar el punto.

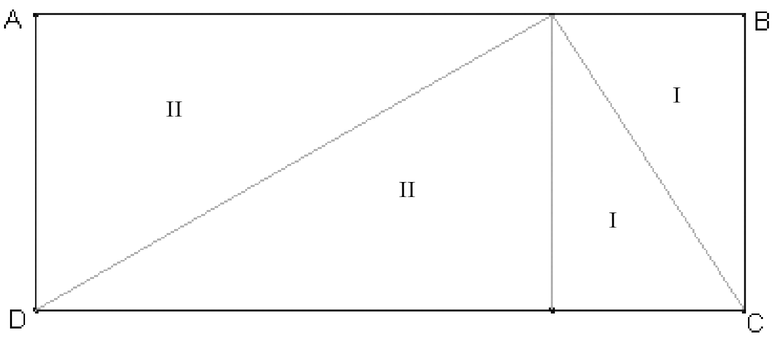
Figura 1



Desde el punto de vista geométrico y utilizando las propiedades de los rectángulos y sus relaciones con los triángulos, resulta que:
Al trazar un segmento paralelo a los lados AD y BC que pase por el punto E quedan determinados dos rectángulos: AEFD y EBCF. Los segmentos DE y EC son las diagonales de cada uno de esos rectángulos.



Entonces, los triángulos AED y EFD son congruentes, de la misma manera que los triángulos EBC y ECF. Ahora bien, si dos triángulos son congruentes no sólo tienen todos sus lados y sus ángulos iguales, sino que también son iguales sus áreas. Esto nos lleva a que las figuras I tienen igual área, al igual que las figuras II. Luego, la suma de las áreas I + II, que dá el triángulo sombreado (Figura 1) tiene igual área que la parte no sombreada. Entonces cada una representa la mitad del área del rectángulo.



Algunas cuestiones importantes de señalar a propósito de este problema:

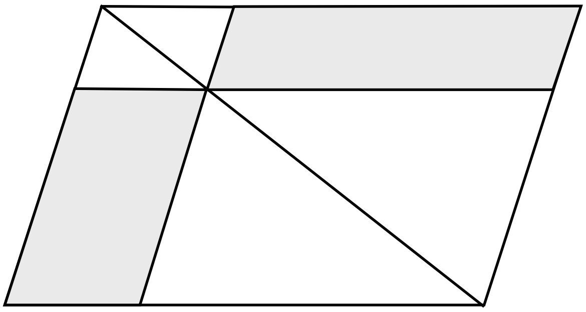
- El resultado hallado es para cualquier rectángulo, es decir que vale para **todos** los rectángulos.

- No importa el lugar donde se ubique el punto E, el área del triángulo que queda determinado es **siempre** la mitad del área del rectángulo.

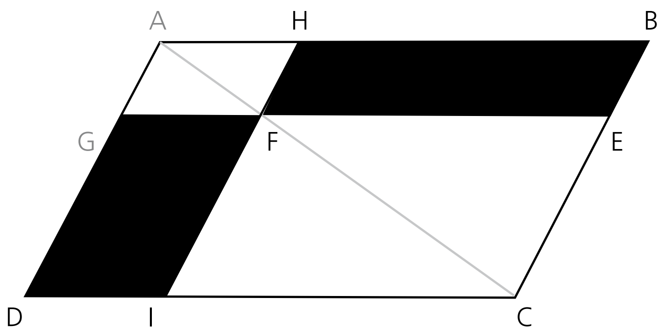
- Si el punto E coincide con uno de los vértices del rectángulo se obtiene una propiedad conocida: la diagonal del rectángulo lo divide en dos triángulos congruentes y, por lo tanto, de igual área. Luego, esta última propiedad es **un caso particular** de la relación que este problema permitió hallar.

Estas propiedades no convencionales, que se refieren a la relación entre el área de un rectángulo y a la de un triángulo que tiene su misma base y altura, son un bagaje para la resolución de problemas muy interesantes y, en particular, para analizar la fórmula del área del triángulo.
El problema anterior puede plantearse para paralelogramos, donde se cumple la misma propiedad.

También puede presentarse el siguiente problema donde se pide comparar las áreas sombreadas.



Un primer paso en la resolución puede ser nombrar los vértices para poder comunicarla.



En ella es posible observar los paralelogramos AHFG y FECI. Como cada diagonal divide a un paralelogramo en dos triángulos congruentes, entonces los triángulos $A\overset{\triangle}{H}F$ y $A\overset{\triangle}{F}G$ tienen igual área, al igual que $F\overset{\triangle}{E}C$ y $F\overset{\triangle}{C}I$. Pero también tienen igual área los triángulos $A\overset{\triangle}{C}D$ y $A\overset{\triangle}{B}C$. Si a estas áreas iguales se les resta, respectivamente, las áreas de los triángulos $A\overset{\triangle}{H}F$ y $F\overset{\triangle}{E}C$, en el caso del triángulo $A\overset{\triangle}{B}C$, y $A\overset{\triangle}{F}G$ y $F\overset{\triangle}{C}I$, al triángulo $A\overset{\triangle}{C}D$, se obtiene el mismo resultado. Esto se debe a que al mismo valor se le restan los mismos números.

Nuevamente, el razonamiento no dependió del paralelogramo (de las longitudes de los lados y las medidas de sus ángulos) ni de la ubicación del punto F. Es interesante plantear esta discusión con los alumnos, no solo por el tipo de razonamiento que se pone en juego, sino por la generalidad que implica.

5°/6° AÑO DE SECUNDARIA

ANÁLISIS DE ÍTEMS CERRADOS

Con este objetivo, proponemos un problema correspondiente a cada uno de los niveles.

Nivel Alto

10 ¿Cuáles de las siguientes funciones reales $f(x)$ **no** está definida para x = -3 ?

A) $f(x) = \dfrac{3}{2x + 6}$

B) $f(x) = \dfrac{2x + 6}{3}$

C) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 3}$

D) $f(x) = \dfrac{3 + x}{3 - x}$

Respuestas

A)	34,28 %
B)	17,68 %
C)	19,43 %
D)	14,99 %

Omisiones 13,62 %

Este problema relaciona dos contenidos de dos ejes diferentes. Por un lado, el concepto de dominio de una función y, por el otro, la definición de división y la imposibilidad de dividir por cero.

Los problemas más escolarizados consisten en hallar el dominio de una función, pero no necesariamente se vincula esa consigna con el conjunto de valores para los cuales la función está definida o los valores de x para los cuales se "puede hacer el cálculo" que propone la fórmula de la función. En este caso, el valor x = -3 no pertenece al dominio de la función y este hecho no quedará necesariamente explicitado para los alumnos que no tengan claro qué significa el dominio.

Los porcentajes de alumnos que seleccionaron cada una de las opciones son los de la tabla (A es la respuesta correcta).

Solo el 34% logró responder correctamente al problema. Sin embargo, llama la atención la gran dispersión que hay entre los demás porcentajes: los estudiantes han elegido, casi de igual modo, las demás opciones (incluso la de no responder). Creemos que esta heterogeneidad habla de una falta de conocimiento y/o reconocimiento de lo que está puesto en juego en el problema.

¿Qué significa para estos alumnos que la función no esté definida para x=-3? ¿Han tenido la oportunidad de relacionar esta idea con la imposibilidad de hallar la imagen de ese valor? ¿Qué problemas permiten poner este conocimiento en juego?

Nivel Medio

8 **Una remera que tiene un costo de $ 10, se vende a $ 14. ¿Cuál es el porcentaje de recargo sobre el costo?**

A) 40%

B) 14%

C) 10%

D) 4%

Respuestas

A)	50,13 %
B)	10,47 %
C)	5,81 %
D)	30,16 %

Omisiones 3,42 %

La resolución de este problema requiere, en primer lugar, comprender que el recargo son los $4 que se le agregan a $10 para obtener $14. Luego, a través de diferentes estrategias, se trata de encontrar qué porcentaje representa 4 de 10, que es 40%.

Los porcentajes para cada una de las opciones son las de la tabla (la correcta es la A):

Aproximadamente la mitad de los alumnos responden correctamente, pero más del 30% considera que 4 es el 4% de 10. Se evidencia una falta de comprensión del concepto de porcentaje o una dificultad para su cálculo mental.

Las respuestas B y C pueden haber sido seleccionadas por aquellos alumnos que, frente a la ausencia de una estrategia de resolución, eligen alguno de los datos del enunciado.

Nivel Bajo

12 Los estudiantes de una clase se ordenaron en un aula de **r** filas de **s** bancos cada fila, dejando 2 bancos sin ocupar en toda el aula. Expresado en términos de **r** y **s**, el número de alumnos de la clase es

A) 2.r – s

B) (r.s) + 2

C) 2 s – r

D) r.s – 2

El ítem requiere encontrar una expresión para la cantidad de alumnos de la clase, que coincide con la cantidad de bancos ocupados. Esta última es una relación que los estudiantes deben hallar para poder comenzar a resolver el problema.

Se trata de reconocer que para hallar el total de elementos que están ubicados en filas que tienen la misma cantidad de bancos es posible usar un producto. En este caso, cada fila tiene s bancos y como hay r filas, hay r.s bancos. Si dos de ellos no se ocupan, entonces hay r.s – 2 alumnos.

Los porcentajes que seleccionaron cada una de las respuestas proporcionadas son los de la tabla (la correcta es la D).

El 66,09% respondió correctamente al ítem.

El 11,67% eligió (r.s) + 2 en lugar de (r.s) – 2, lo cual no puede interpretarse como un error conceptual grave. Es probable que los alumnos hayan interpretado que los dos bancos que deben dejarse sin ocupar tienen que sumarse al total de bancos que hay en el aula. También es posible que lo hayan elegido solo por tener paréntesis, apelando a cierto contrato didáctico.

Las respuestas A y C parecen haber sido elegidas por aquellos alumnos que, frente a la ausencia de una estrategia de resolución, combinan los datos del enunciado sin ningún mecanismo de control.

Respuestas

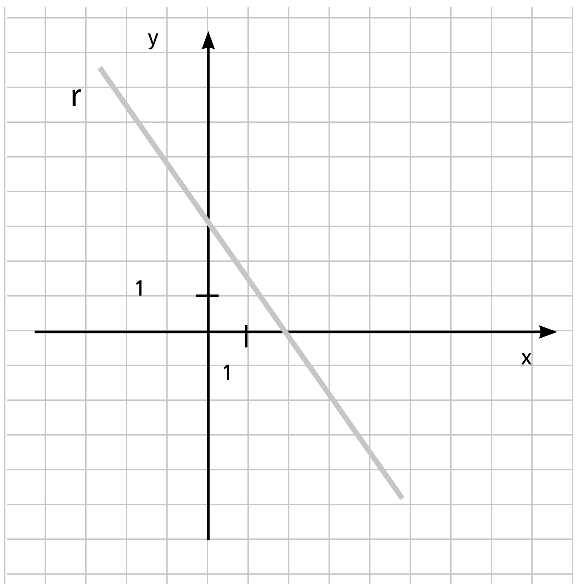
A)	8,87 %
B)	11,67 %
C)	7,51 %
D)	66,09 %

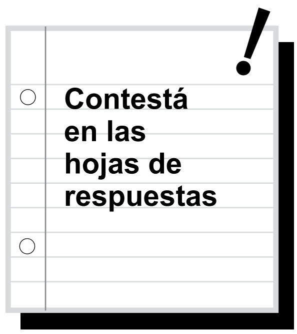
Omisiones 5,86 %

INFORME DE ÍTEMS ABIERTOS

PROBLEMA: LAS FUNCIONES Y LOS PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO

11





Marcá en el gráfico dos puntos A y B que pertenezcan a la recta r y escribí las coordenadas de cada uno.

Este problema puede pensarse como constituido por dos partes. En una primera instancia, el alumno tiene que identificar que la recta está formada por puntos, lo cual puede resultar intuitivo para algunos de ellos. Una vez identificados dos de esos puntos, resta nombrarlos de un modo conveniente.

Además de la identificación y representación de puntos es interesante detenerse en qué comprenden los alumnos acerca de la relación entre los puntos que pertenecen a una recta y esa recta. A propósito de esto, Claudia Acuña *(2)* afirma que:

> *"Los primeros estudios sobre la interpretación de los puntos reportan que los estudiantes desconocen la noción abstracta de punto (Kerskake, 1980; Herscovics, 1980) cuando realizan tareas de identificación. Esta situación puede contribuir a pensar que los puntos marcados o localizados en una recta son esencialmente distintos de los que la forman. Unos puntos tienen una representación gráfica (el rasgo); sin embargo, los que están en una recta como unión infinita no muestran tal representación y de alguna manera se disuelven en la recta. Al asignar a los puntos dimensión y corporeidad mediante el rasgo es difícil concebirlos sin ellos. Kerslake (1980), en entrevistas preliminares a su investigación sobre graficación, halló que una gran cantidad de estudiantes tienen dificultades con la idea de que existan varios puntos sobre la recta además de aquellos que han localizado y que, ocasionalmente, aceptan la existencia del punto medio. También apunta que "parece más difícil pensar una infinidad de puntos apiñados entre dos puntos dados que pensar en una infinidad de puntos apiñados en una recta."*

Es decir, los alumnos utilizan un círculo (o una marca similar) para señalar un punto, y así adquiere otro estatus. Pareciera que, para ellos, los puntos que están identificados son diferentes de los demás que forman la recta. Resulta entonces que si los puntos tienen dimensión, no es posible pensar en que una recta –y mucho menos un segmento- estén formados por infinitos puntos.

El alumno debe reconocer que son necesarios dos números para poder ubicar un punto en el plano, que un solo número determina infinitas posiciones (una recta horizontal o una vertical). También es importante señalar que el orden en que se dan esos valores o se los indica, es convencional.

La presencia de la grilla en este problema permite "leer" con facilidad las coordenadas de algunos puntos que pertenecen al gráfico de la recta, como por ejemplo (2,0) y (0,3), aunque el gráfico corta a la cuadrícula en otros puntos (es decir, hay otros puntos que pertenecen a la gráfica de la recta con ambas coordenadas enteras y, por esa razón, son más fáciles de identificar).

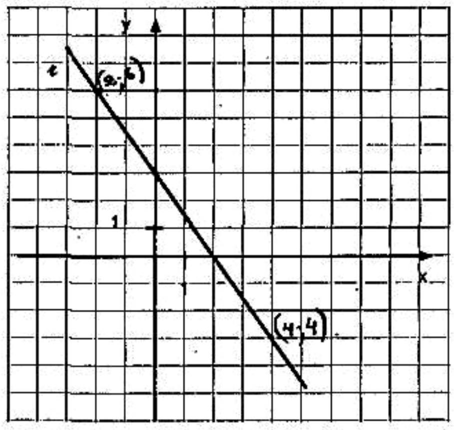
Es posible que algunos alumnos den las coordenadas de los puntos como (0,2) y (3,0), invirtiendo el orden. De todos modos, se trata de un desconocimiento de una convención y no necesariamente implica una falta de concepto, debido a que un alumno que escribe las coordenadas al revés probablemente sea capaz de ubicar sus puntos en el plano. No tendrá la misma suerte, seguramente, al tener que ubicar puntos dados a través de sus coordenadas. La escritura de los puntos es puramente convencional y escribir (-3,4) en lugar de (4,-3) hace a un problema de comunicación: el que lee un punto escrito por este alumno lo ubicará en forma simétrica respecto del origen de coordenadas en relación a como lo graficaría quien los escribió, mientras que un punto leído por este alumno podría estar bien ubicado o no. Esto se debe a que los "errores" no necesariamente son estables. Muchos estudiantes tienen dificultades al indicar las coordenadas de los puntos, pero no las tienen al leerlas.

(2) Acuña, C. (2005) pág. 23.

EJEMPLOS DE RESOLUCIONES DE ALUMNOS

Ejemplo 1

11



Marcá en el gráfico dos puntos A y B que pertenezcan a la recta *t* y escribí las coordenadas de cada uno.

Este alumno reconoce que son necesarios dos números para determinar la posición de cada punto, cuenta la cantidad de unidades que hay que moverse horizontal y verticalmente desde el origen de coordenadas hasta el punto pero solo tiene en cuenta el valor absoluto de la distancia. Pareciera desconocer que el signo de la coordenada indica la dirección del desplazamiento.

Resulta interesante analizar el trabajo matemático que este estudiante realizó para resolver el problema. Ubicó los puntos de manera conveniente, es decir, con coordenadas enteras, luego analizó la cantidad de unidades que cada punto se encontraba desplazado respecto del origen de coordenadas, tanto horizontal como verticalmente. Si bien no contó correctamente la cantidad de unidades que se desplazó verticalmente para el punto que se encuentra en el cuarto cuadrante, es posible que haya pensado "4 para la derecha, 4 para abajo, son 4 y 4". ¿Qué es lo que no sabe? No sabe que para indicar un desplazamiento hacia la izquierda o hacia abajo se antepone un signo negativo, pero solo con el objetivo de diferenciarlo de un desplazamiento en el sentido opuesto. Nuevamente, se trata de una convención y no de un conocimiento de una profunda raigambre conceptual.

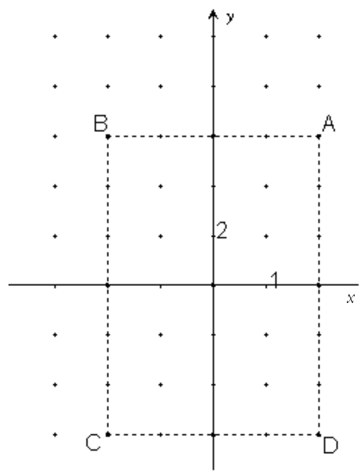
¿Cómo podrían trabajarse estas cuestiones convencionales en el aula?

Una posibilidad es proponer al grupo de alumnos una situación de comunicación como la siguiente:
Se divide la clase en una cantidad par de grupos. Un mismo equipo está formado por dos grupos, uno que será el emisor del mensaje y otro, que será el receptor. Ambos juegan en colaboración. La tarea consiste en que el grupo emisor envíe un mensaje (en el que no puede haber dibujos) a sus compañeros del grupo receptor de manera que los receptores puedan construir la figura que tienen los emisores sin haberla visto.

Si hubiera alguna duda sobre el contenido del mensaje, los receptores pueden enviar preguntas. Al terminar la construcción, ambos grupos se reúnen a cotejar si las figuras coinciden.

En este caso, la figura a dictar estará constituida por un conjunto de puntos aislados.

A uno de los alumnos se le entrega una copia con la siguiente gráfica, mientras que el otro recibe un sistema de coordenadas en blanco:

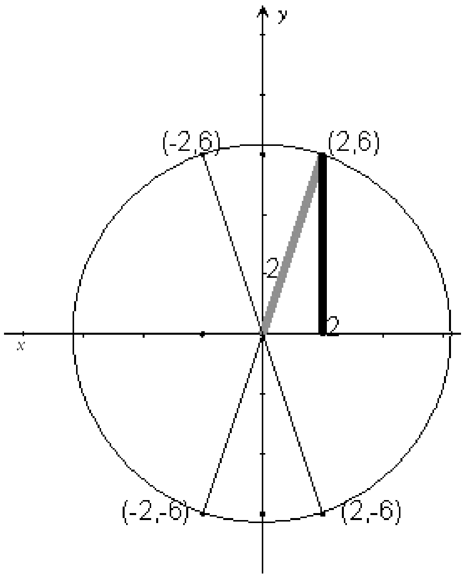


Los puntos han sido seleccionados para que en el grupo emisor se plantee una discusión acerca de cómo distinguirlos, ya que si bien se trata de puntos claramente diferentes, la distancia de cada uno de ellos al origen de coordenadas es la misma En todos los casos también hay que recorrer la misma cantidad de unidades "horizontales" (2) y "verticales" (6) desde el origen de coordenadas, lo que cambia es la dirección en la que se hay que recorrerlas. Es decir, se trata de puntos que pertenecen a la misma circunferencia (de centro el origen de coordenadas y radio la distancia de cualquiera de esos puntos al origen).

Entonces, la situación de comunicación plantea la necesidad de diferenciar estos puntos. Es posible que los alumnos elaboren modos personales –coloquiales- de comunicación, que pueden incluir indicaciones del estilo "Para el punto A, ir 2 unidades para la derecha y 6 para arriba", o "Para el punto B ir 2 unidades para la izquierda y 6 para arriba". En este momento quedará a cargo del docente introducir o recordar la convención para indicar las coordenadas de un punto en un sistema de coordenadas cartesianas y aclarar que el punto de partida es el origen de coordenadas.
En este momento puede plantearse una nueva cuestión:

Los cuatro puntos pertenecen a una misma circunferencia. ¿Pueden explicar por qué?

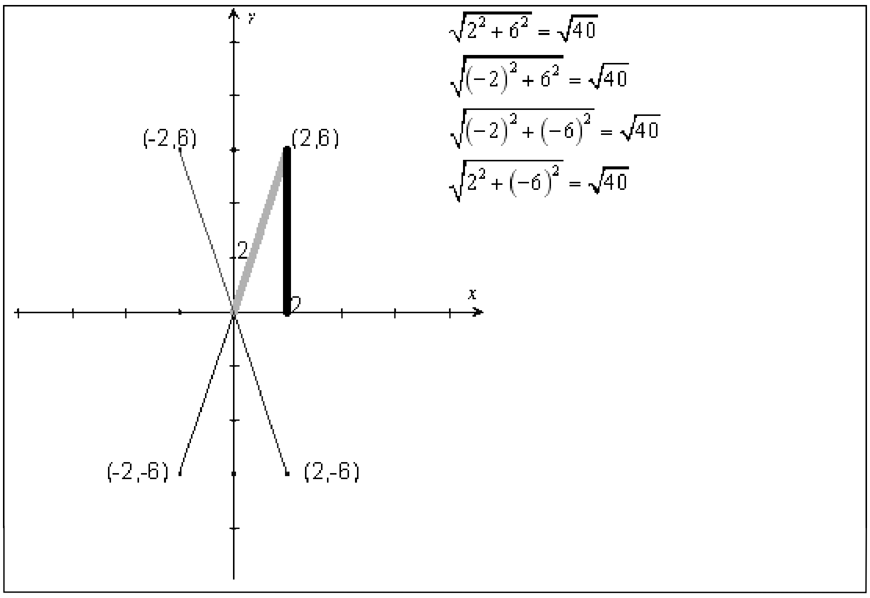
Una forma empírica de "ver" que efectivamente los puntos pertenecen a la misma circunferencia puede consistir en trazar la que tiene centro en el origen de coordenadas y que pasa por uno de ellos. Muchos alumnos no se dan cuenta de ensayar con uno solo de los puntos y utilizan métodos más rudimentarios, que consisten en pinchar el compás y ensayar con diferentes aperturas.



Aunque se encuentre una circunferencia, la imprecisión de los instrumentos geométricos puede plantear dudas. Y si los alumnos no se las plantean, generarlas será tarea del docente.

¿Cómo podemos estar seguros de que los puntos realmente pertenecen a la circunferencia que dibujaron? ¿Podemos afirmar sin lugar a dudas que los puntos son esos y no otros que estén muy cercanos a ellos?

Se propone entonces que los alumnos necesiten buscar argumentos para demostrar que estos puntos pertenecen a la misma circunferencia **sin lugar a dudas**. Una manera de hacerlo es a través de una definición de circunferencia: si estos puntos pertenecen a la misma circunferencia entonces la distancia de cada uno de ellos al centro de la misma (origen de coordenadas, en este caso). Las distancias de cada punto al origen son:



Los cálculos anteriores, aunque expresados con números, pueden dar pie para una generalización. ¿Qué hizo que en todos ellos se obtuviese el mismo resultado? Al analizar los cálculos que se realizaron en cada caso, puede "verse" que los números involucrados tienen el mismo valor absoluto (las primeras coordenadas, por un lado, las segundas por el otro). Como esos números se elevan al cuadrado, se obtiene entonces el mismo resultado siempre.

A partir de aquí es posible plantear una nueva pregunta, tendiente a generalizar aun más. ¿Siempre que las coordenadas de los puntos difieran en algún signo se encontrarán en la misma circunferencia con centro en el origen de coordenadas?
Los alumnos, con la ayuda del docente, pueden hacer un análisis similar al que hicieron con los puntos dados en el gráfico para concluir que lo que hace que los resultados de las distancias sean las mismas es que los valores absolutos de sus coordenadas son iguales, por lo que sus cuadrados son también iguales.

Luego, es posible generalizar y afirmar que los puntos (a,b), (-a,b), (-a,-b) y (a,-b), donde a y b son números reales y ambos no son nulos simultáneamente, siempre pertenecen a una circunferencia de centro el origen de coordenadas. El radio será la distancia de cualquiera de cada uno de los puntos al origen:

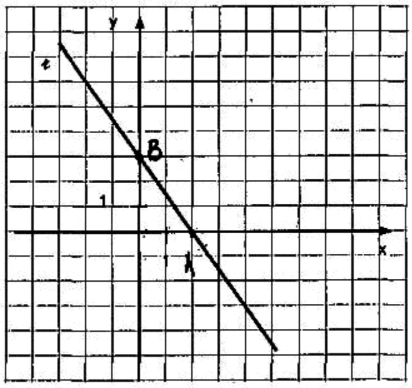
$$radio = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 2

Resolver un problema en matemática implica tomar decisiones. Por ejemplo, elegir una estrategia de resolución por considerarla la más conveniente. Sabemos que los alumnos no siempre tienen este criterio de selección. Es más, muchos de nuestros estudiantes nos dirán "demasiado si se me ocurre una forma de hacerlo". Pedirles que opten por una forma de resolución y que además sea "la más conveniente" es realmente una gran exigencia si esto no ha sido objeto de reflexión en la clase. ¿Cómo se espera que los alumnos aprendan a seleccionar cuál es la manera que les conviene? ¿Qué significa "conveniente"? ¿"Conveniente" a los ojos de quién?

Muchos alumnos consideran conveniente una estrategia más larga pero que conocen mejor frente a una desconocida, la cual podría posicionarlos en un lugar de mayor inseguridad. Para otros, la conveniencia pasa por usar "la" que saben. Estos son los alumnos que no tienen posibilidad de elegir: solo pueden usar la que tienen disponible.
En el caso de este ejemplo, el alumno no solo encontró la respuesta correcta sino que encontró la más simple: los puntos que, por pertenecer a alguno de los ejes coordenados, tienen una de sus coordenadas igual a 0. Estos puntos tienen, además, coordenadas enteras, lo que constituye otra condición para hacer que su lectura sea más fácil.

. 11



Marcá en el gráfico dos puntos A y B que pertenezcan a la recta r y escribí las coordenadas de cada uno.

A=(2;0) ; B=(0;3)

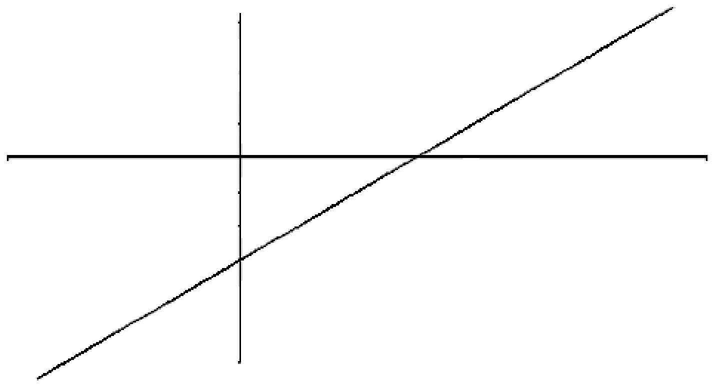
Se aprende a tomar decisiones en matemática, se enseña a tomar decisiones. Pero, ¿cuál sería, entonces, el objeto de enseñanza? Ciertamente no se trata de un objeto matemático, sino de uno de otra entidad, que tiene que ver con la forma de trabajo en matemática.

Todas estas cuestiones no se enseñan en un período acotado de tiempo y son transversales a todos los contenidos. Son preguntas que se deberían proponer para reflexionar con el objetivo de sacar conclusiones. En este caso particular, se pueden buscar varios puntos y analizar la dificultad que plantea la lectura de cada uno de ellos, cuál es más simple, cuál no puede leerse de manera precisa por no tener coordenadas enteras, etc. Esto lleva a elaborar criterios acerca de la "conveniencia" para seleccionar puntos de una recta que sean de más fácil lectura.

Ahora bien, una pregunta que podría hacerse en este momento es: ¿Podemos afirmar que si un alumno es capaz de señalar las coordenadas de puntos que pertenecen a una recta, como en el caso de la gráfica que se presenta, entonces "sabe" función lineal? Ciertamente que no. Saber leer puntos del plano es una condición necesaria pero no suficiente para comprender el concepto de función lineal. Para una recta como la que se dio en el problema analizado, que tiene dos puntos claramente marcados, no es necesario saber qué es una recta, ni conocer su ecuación, ni cómo hacer para buscar otros puntos que pertenezcan a ella. Alcanza con la percepción y saber dar coordenadas de puntos. Nos parece muy importante, puesto que muchas veces creemos que estamos evaluando un contenido cuando, en realidad, no es así.

Un ejemplo de problema que puede usarse en el aula para que los alumnos tengan la necesidad de acudir a los conceptos más vinculados con las funciones lineales es el siguiente:

La gráfica de la recta que aparece debajo corta al eje de las ordenadas en el punto (0,-3). Si su pendiente es 4, encuentren tres puntos más que pertenezcan a ella.



El gráfico no es de mucha utilidad, salvo para saber que se trata de una función creciente. Al no tener puntos marcados que puedan leerse, los alumnos necesitan apelar al concepto de pendiente a partir del punto dado: si el punto (0,-3) pertenece a la recta, al aumentar la abscisa en una unidad, la ordenada aumenta 4 unidades.

Es así que el punto (0 + 1;-3 + 4) = (1 ; 1) es otro punto de la recta.

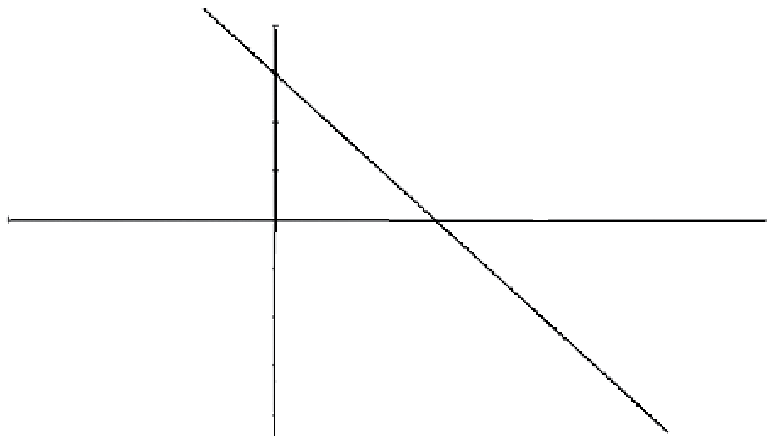
Del mismo modo se puede disminuir 1 unidad en las abscisas y 4 en las ordenadas a partir de (0 ; -3), obteniendo (0 – 1 ; -3 – 4) = (-1 ; -7).

El concepto de proporcionalidad permite obtener cualquier cantidad de puntos a partir de uno dado y conociendo la pendiente de la recta:

En una recta de pendiente 4:
Si se aumentan las abscisas en 1 unidad, las ordenadas aumentan 4 unidades.
Si las abscisas aumentan k unidades, las ordenadas aumentan 4k unidades.

Los alumnos suelen tener menos dificultades para el caso en que k es un número entero, pero la segunda afirmación vale para cualquier valor real de k. Será necesario hacer un trabajo con ellos donde analicen qué sucede en el caso de aumentar media unidad en las abscisas, $\frac{1}{4}$ de unidad, etc. para que tengan la oportunidad de poner en juego la relación entre los crecimientos de las coordenadas.
Otra actividad posible es:

La gráfica de la siguiente recta corta al eje de las ordenadas en el punto (0 ; 3). Si pasa además por el punto (-3 ; 18), encontrá otros tres puntos que pertenezcan a la misma recta.



Para encontrar otros puntos de esta recta tampoco es suficiente el recurso perceptivo: no es posible encontrarlos mirando la gráfica. Esto lleva a la necesidad de tener que buscar otras estrategias que, en este caso debido a la información que se provee tendrán que estar vinculada con el crecimiento de la recta. La gráfica de la recta es decreciente y los puntos que se dan lo confirman: la imagen de -3 es mayor que la imagen de 0. En 3 unidades (de -3 a 0), las ordenadas decrecen de 18 a 3, es decir 15 unidades por cada 3. Esta relación permite afirmar que las ordenadas decrecen 5 unidades por cada una que aumentan las abscisas, por lo que la pendiente de esta recta es -5. En 3 unidadesde x, y decrece 15. En 1de x, y decrece 15 ÷ 3 = 5.

Es interesante señalar que, para resolver este problema, el valor de la pendiente (o incluso el nombre pendiente) no se constituye en un elemento necesario. Alcanza con su concepto, con que los alumnos busquen el modo de “medir los crecimientos” de esta función.

Resulta entonces que cada 3 unidades (en x o en las abscisas) las ordenadas decrecen 15 unidades. También podría decirse que por cada 3 unidades que disminuyen las abscisas, las ordenadas aumentan 15 unidades.
Usando estas relaciones y proporcionalidad pueden encontrarse infinitos puntos que pertenecen a la gráfica de la recta. Por ejemplo:

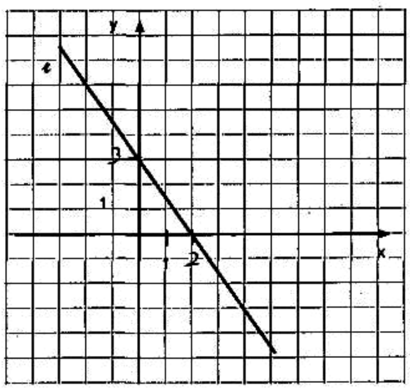
(0 + 3, 3 – 15) = (3 , -12)
(0 + 1 , 3 – 5) = (1 , -2)
(-3 – 6, 18 + 30) = (-9 , 48) …

Ejemplo 3

El hecho de que los dos puntos marcados estén sobre los ejes y sean fácilmente identificables, puede hacer que los alumnos que no tengan disponible la idea de que son necesarias dos coordenadas para representarlos no se enfrenten a ninguna dificultad. También es posible que algunos estudiantes consideren que solo es necesario un número para que estos puntos queden determinados, ya que la otra coordenada está predeterminada por el eje en el que se encuentra y vale cero.

Si se hubiese pedido un tercer punto, es probable que este alumno se hubiese visto enfrentado a la necesidad de utilizar dos valores numéricos o que se evidencie si puede o no representar puntos que no estén sobre los ejes.

11



Marcá en el gráfico dos puntos A y B que pertenezcan a la recta *t* y escribí las coordenadas de cada uno.

PROBLEMA: LAS FUNCIONES LINEALES COMO MODELO

En este problema se propone utilizar un modelo lineal dado para representar la relación que existe entre la temperatura medida grados Fahrenheit y esa misma temperatura en grados Celsius. Su resolución no solo involucra comprender la relación que plantea la ecuación propuesta, sino que además es necesario que los alumnos interpreten qué se les está preguntando: cuál es la temperatura que se representa con el mismo número en ambos sistemas de medición.

18 La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

Esta pregunta no es de un planteo simple, pero se agrega además la dificultad del contexto: es posible que muchos alumnos piensen que las temperaturas en un sistema de medición se transforman en otras diferentes, lo cual es cierto salvo para un único valor. Desde el punto de vista del estudiante, suele suceder que una afirmación que "sea válida en casi todos los casos" adquiere un estatus de verdadera.

La matemática no dice lo mismo. Sin embargo, nos encontramos frente a un enunciado incompleto, que no tiene un dominio de definición, de validez. La afirmación "las temperaturas en grados Celsius se representan con números diferentes en grados Fahrenheit" es falsa, pero se convierte en verdadera cuando se excluye el caso de una temperatura de -40 grados (Celsius o Fahrenheit). La intuición dice que no pueden ser iguales los números que representan la misma temperatura en estos dos sistemas diferentes, y no se equivoca por mucho. Para los alumnos que utilizan la intuición, el contexto puede funcionar como un obstáculo para la resolución.

¿Cómo resolver esta situación?

Una posible estrategia consiste en encontrar la solución de la ecuación $C = \frac{5}{9}(C - 32)$ considerando a C como variable.
Pero también es posible plantear $F = \frac{5}{9}(F - 32)$ o $x = \frac{5}{9}(x - 32)$. Si bien las tres ecuaciones solo varían en el nombre asignado a la variable, para los alumnos pueden ser sustancialmente diferentes. ¿La temperatura a hallar será una temperatura en grados Celsius, o en grados Fahrenheit? ¿Podrá considerarse cualquier nombre para la variable en juego, y en ese caso, qué representa?

Finalmente, podrá encontrarse el valor para C y F, que es -40 grados. Es decir, que una temperatura de -40 grados Celsius equivale a -40 grados Fahrenheit.
La interpretación del problema implica comprender cómo funciona el modelo propuesto.

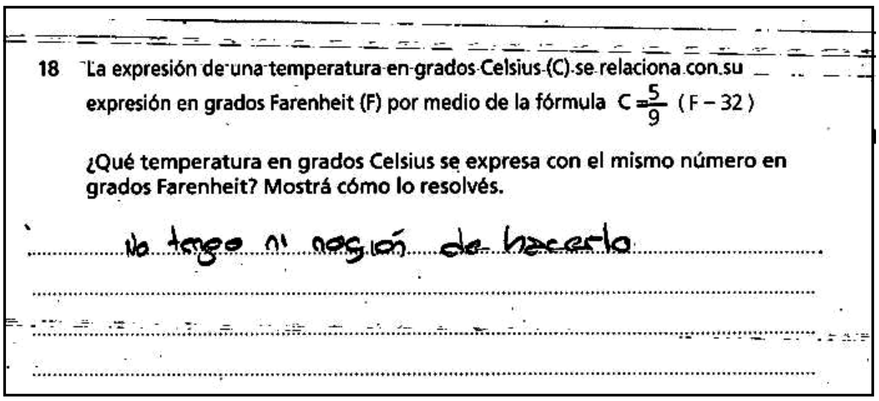
¿Qué rol juega la modelización en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática?
A propósito de la modelización, P. Sadovsky *(3)* señala:

> *"Muy sucintamente diremos que un proceso de modelización supone en primer lugar recortar una cierta problemática frente a una realidad generalmente compleja en la que intervienen muchos más elementos de los que uno va a considerar, identificar un conjunto de variables sobre dicha problemática, producir relaciones pertinentes entre las variables tomadas en cuenta y transformar esas relaciones utilizando algún sistema teórico-matemático, con el objetivo de producir conocimientos nuevos sobre la problemática que se estudia. Reconocer una problemática, elegir una teoría para "tratarla" y producir conocimiento nuevo sobre dicha problemática son aspectos esenciales del proceso de modelización.*
> *Tradicionalmente, la noción de modelización se ha reservado para el estudio de sistemas no matemáticos –provenientes generalmente de las ciencias naturales o sociales- usando algún sistema teórico de la matemática. Chevallard (1989), sin embargo, reivindica también la noción de modelización para pensar la producción de conocimientos de un sistema matemático a través de otro sistema, también matemático. La llama "modelización intramatemática"."*

La resolución de este problema requiere que el alumno comprenda qué información otorga la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, ya que ella representa una relación entre temperaturas. Desde la escuela primaria los alumnos están acostumbrados a manipular fórmulas, generalmente para el cálculo de perímetros o áreas de figuras o volúmenes de cuerpos. Sin embargo, a pesar de que estas fórmulas son la expresión de una relación entre la/s medida/s de algunos lados de la figura o cuerpo y el perímetro, área o volumen, según sea el caso, rara vez se lo considera así. En la práctica, estas fórmulas son usadas para reemplazar valores numéricos, operar y así obtener la magnitud buscada. No hay ni se busca encontrar una relación entre este trabajo y el que se hace para hallar la imagen de un elemento a través de una función, por ejemplo.

A continuación mostraremos y analizaremos algunas respuestas de alumnos a este problema.

Ejemplo 1


18 La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

No tengo ni noción de hacerlo

(3) Sadovsky, P. (2005). Op. Cit.

La respuesta de este alumno: “No tengo ni noción de hacerlo” muestra la gran dificultad que este tipo de problema genera en los alumnos. Ni siquiera puede comenzar a resolverlo.

Otros estudiantes, como el siguiente, atribuyen el no haberlo resuelto a una causa externa: “Nunca vimos la fórmula o no la recuerdo”. Es interesante analizar el lugar que tienen las fórmulas para él e inferir cuál tienen en su clase de Matemática. Pareciera ser que las fórmulas solo son dadas por el profesor, pero no en el contexto de una modelización sino para calcular magnitudes (áreas, perímetros, etc.). Es por eso que las fórmulas tienen que ser conocidas (la del área del trapecio, la del volumen de un prisma, etc.) y esas son las que reconocen y usan. Las demás no. Obviamente, esta forma de trabajo quita de escena a todo trabajo vinculado con la producción de fórmulas.

18 **La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

no entiendo la fórmula, yo que nunca la vimos o por lo menos no la recuerdo.

Su justificación da una idea del tipo de práctica habitual en su clase: las fórmulas con las que se trabaja son conocidas. Nuevamente, el contexto pareciera funcionar aquí como un obstáculo pues este alumno tiene la idea de que debiera conocer la fórmula que se da como dato. Cabe entonces la pregunta, si el docente hubiese tenido la oportunidad de interactuar con este alumno durante esta evaluación, ¿hubiese podido avanzar en sus ideas, obtener alguna solución? Parece difícil. El trabajo que ha hecho está muy lejos del que es necesario desarrollar para resolver este problema.

El siguiente alumno hace un intento por resolver.

18 **La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

$\frac{5}{9} - 32 = \frac{27}{8}$

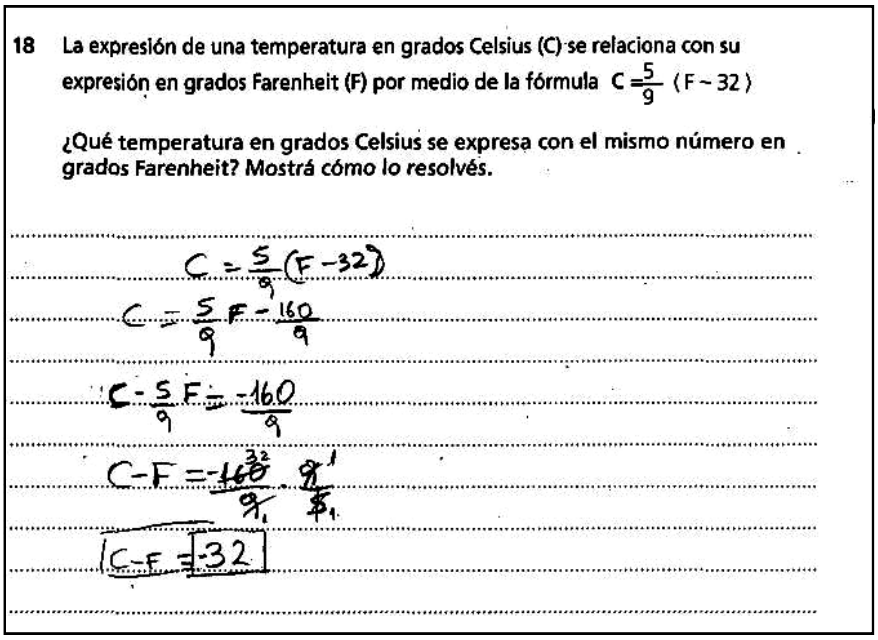
Este alumno ignora la presencia de las variables y opera (incorrectamente) con los valores restantes. Transforma el cálculo $\frac{5}{9} - 32$ en $\frac{32-5}{9} = \frac{27}{9}$. El problema que originalmente estaba planteado desde los marcos funcional y algebraico se ha transformado en un cálculo combinado, es decir en un problema (o no) *(4)* dentro del marco aritmético. No sabe si el valor que halló es coherente con el problema, si es correcto

(4) Recordemos que una situación será un problema para un alumno si le plantea un desafío, si lo obliga a tomar decisiones. Desde este punto de vista, un cálculo aritmético puede ser un problema para algunos estudiantes y ciertamente no para otros.

o no porque no hace una anticipación. Es posible que este alumno no se pregunte si está resolviendo correctamente el problema, sino que solo está haciendo lo que puede o lo que cree que el docente espera que él haga.
Eliminar las variables puede ser también una vía de escape frente a un problema que no se sabe cómo resolver, para transformarlo en otro conocido.

Ejemplo 2

En estos tres casos los alumnos operan con la fórmula llegando a otra relación que también involucra a las dos variables. En el primer caso, el estudiante comete un error y frente a un camino sin salida, recuadra el último resultado al que llega, que nada tiene que ver con la solución del problema.
El alumno recuadra "el resultado" de la manipulación que realizó, mostrando un trabajo más vinculado con lo aritmético que con lo algebraico y lo funcional. En el dominio de la aritmética, el resultado suele ser "lo que aparece del otro lado del signo igual".



18 **La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

$C = \frac{5}{9}(F-32)$

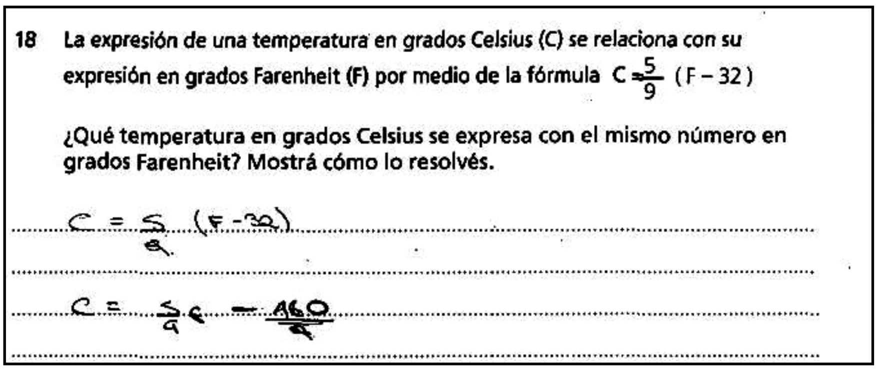
$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

$C - \frac{5}{9}F = -\frac{160}{9}$

$C - F = -\frac{160}{9} \cdot \frac{9}{5}$

$\boxed{C - F = -32}$

Aquí, el estudiante aplica la propiedad distributiva, que es quizás lo único que le resulta "visible" para hacer. Nuevamente, obtiene una expresión en dos variables que es equivalente a la original, pero no logra avanzar. A diferencia de la resolución anterior, este alumno parece ser consciente de no haber llegado a la solución.



18 **La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula** $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

$C = \frac{5}{9}(F-32)$

$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

Aquí, el alumno opera del mismo modo en que lo hace con las ecuaciones en una variable, intentando despejar una de las variables. Al haber dos, le queda expresada una de ellas en función de la otra.

Nuevamente, lo hecho no parece responder al problema. Es probable que su resolución se apoye en lo que considera que debe hacer, que es resolver ecuaciones.

Muchas veces, la resolución de ecuaciones adquiere una importancia desmedida, en desmedro de otros contenidos como las funciones y la posibilidad de modelizar a través de ellas.

18 La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

$$C = \frac{5}{9}(F-32)$$

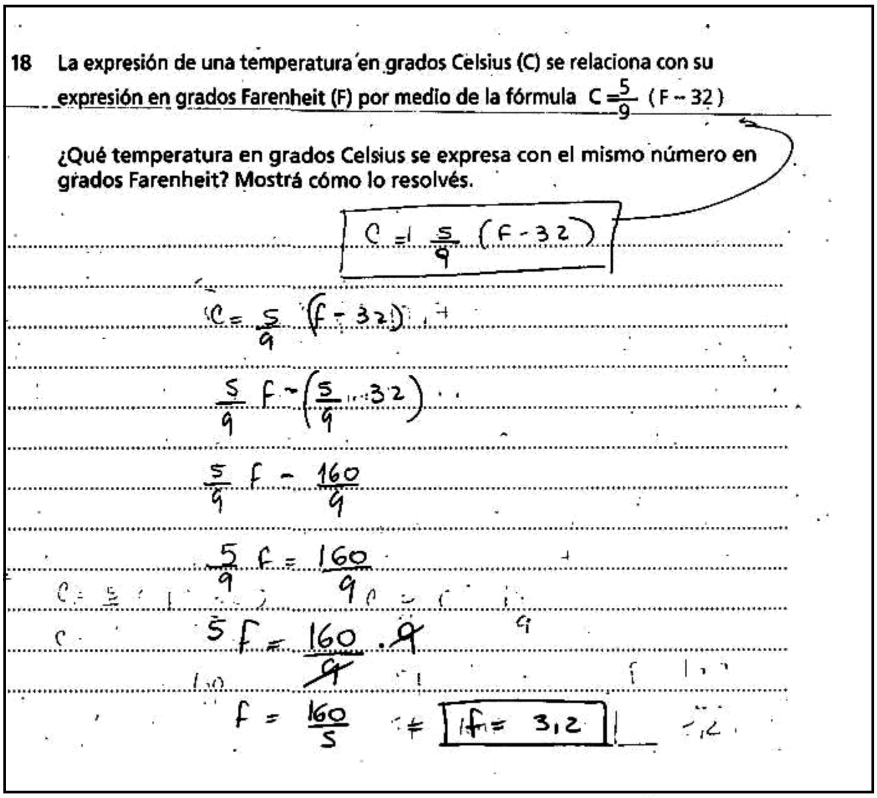
$$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$$

$$C + \frac{160}{9} = \frac{5}{9}F$$

$$\boxed{\frac{C + \frac{160}{9}}{\frac{5}{9}} = F}$$

Es interesante observar que en las tres resoluciones que hemos seleccionado para este ejemplo (y en las demás que hemos visto y que consideramos dentro de esta categoría), los alumnos operan, que no es la finalidad del problema. Creemos que los estudiantes buscan operar porque eso es lo que están habituados a hacer. Así son los problemas que se les presentan vinculados a las variables, y nada tienen que ver con la modelización.

Ejemplo 3



18 La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

$\boxed{C = \frac{5}{9}(F - 32)}$

$C = \frac{5}{9}(f - 32)$

$\frac{5}{9}f - \left(\frac{5}{9} \cdot 32\right)$

$\frac{5}{9}f - \frac{160}{9}$

$\frac{5}{9}f = \frac{160}{9}$

$5f = \frac{160}{\cancel{9}} \cdot \cancel{9}$

$f = \frac{160}{5}$ $\boxed{f = 3,2}$

En este caso se ve como un alumno busca transformar la expresión en una conocida, con una sola variable, pero lo hace eliminando una de ellas.
El hilo del razonamiento parece haber sido el siguiente:

1) Aplica la propiedad distributiva, como único "cálculo" posible a hacer.
2) Al haber desarrollado la propiedad distributiva de manera aislada, obtiene una expresión en una variable, $\frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$, que considera como si estuviese igualada a cero.
3) Resuelve la ecuación $\frac{5}{9}F - \frac{160}{9} = 0$

Es muy habitual que, ante la ausencia de signo igual, los alumnos consideren que la ecuación está igualada a cero.

Ejemplo 4

18 La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

-17,22° Celcius = 1° Farenheit

si 1° F → $C = \frac{5}{9}(1-32) = -17{,}22°\ C$

18 La expresión de una temperatura en grados Celsius (C) se relaciona con su expresión en grados Farenheit (F) por medio de la fórmula $C = \frac{5}{9}(F - 32)$

¿Qué temperatura en grados Celsius se expresa con el mismo número en grados Farenheit? Mostrá cómo lo resolvés.

GRADOS FARENHEIT OPTADOS = -40° F

$C = \frac{5}{9}(F-32)$

$C = \frac{5}{9}(-40-32)$

$C = \frac{5}{9} \cdot (-72)$

$\boxed{C = -40}$

Rta: La Temperatura en grados celsius que se expresa con el mismo número en grados Farenheit es -40°C.

Hay alumnos que utilizan estrategias de resolución más rudimentarias, como los ensayos con valores numéricos. El primer alumno no llega a la solución, mientras que el segundo sí.

El primer alumno comienza a hacer los intentos de estimación hallando la temperatura en Fahrenheit correspondiente a 1°C pero no continúa desarrollando la solución.
El segundo estudiante indica la solución sin mostrar cómo llegó a ella, pero es muy probable que haya sido a través de estrategias de ensayos y error.

Generalmente, a los profesores no suele gustarnos que los alumnos resuelvan problemas de este modo. Sin embargo, la mayoría de las veces no se trata de ensayos al azar sino que los alumnos que logran encontrar la solución van ajustando los valores en relación a los resultados que obtienen, y eso es moldeado por el comportamiento de la función.

Por ejemplo, en este caso, el segundo alumno pudo haber comenzado sus ensayos con valores enteros positivos cada vez mayores, pero a medida que estos aumentaban, también aumentaba la diferencia entre los números que representan las temperaturas en cada uno de los sistemas de medición. Este análisis lleva a decidir que la solución no se encontrará dentro de este intervalo y que será necesario probar con valores menores que 1. Nuevamente, será a partir de los ensayos que se podrá ver que a medida que disminuye la temperatura en grados Fahrenheit también disminuye la diferencia entre los números que representan las temperaturas en cada uno de los sistemas de medición. Una vez llegado a este punto, se trata de encontrar cuál es el valor en cuestión.

La siguiente tabla muestra un posible ejemplo de ensayos

F	$C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$	
0	$-17,\widehat{7}$	
1	$-17,\widehat{2}$	
2	$-16,\widehat{6}$	
3	$-16,\widehat{1}$	
5	-15	
10	$-12,\widehat{2}$	
15	$-9,\widehat{4}$	Hasta aquí se puede ver que a medida que aumenta la temperatura en grados Celsius, también lo hace el valor en Fahrenheit, pero los valores que adquieren las mismas no se asemejan.
-5	$-20,\widehat{5}$	Se prueba con valores negativos.
-10	$-23,\widehat{3}$	
-15	$-26,\widehat{1}$	
-20	$-28,\widehat{8}$	
-25	$-31,\widehat{6}$	
-30	$-34,\widehat{4}$	Los valores que representan las temperaturas se van acercando.
-35	$-37,\widehat{2}$	
-40	-40	Los valores que representan las temperaturas son iguales.

Por supuesto que todo el análisis anterior puede hacerse en este caso porque la solución del problema es un número entero, -40, que no es muy difícil de hallar. Si la solución, en cambio, hubiese sido $-40,2353798\widehat{1}$ la estrategia de resolución anterior se hubiese mostrado, por lo menos, poco económica.

Luego, si se quiere que los alumnos no resuelvan los problemas a través de estimaciones es necesario pensar con cuidado en los valores de las variables en juego para que realmente se dificulte la resolución por tanteo y les surja la necesidad de buscar nuevas estrategias.

PROBLEMA: LAS PROBABILIDADES Y LA INTUICIÓN

El cálculo de probabilidades no siempre va de la mano de lo que dicta la intuición. Muchos alumnos se basan en ella y arriban a resultados incorrectos, que son difíciles de rebatir. A propósito de esta cuestión Andreas Eichler *(5)* afirma:

> *Las teorías subjetivas se definen como un sistema complejo de cognición que incluye una racionalidad que es, por lo menos, implícita. Por lo tanto, las cogniciones individuales están conectadas de modo argumentativo. Las teorías subjetivas contienen conceptos subjetivos, definiciones subjetivas de estos conceptos y relaciones entre estos conceptos que constituyen la estructura argumentativa del sistema cognitivo.*

Además, Gigerenzer *(6)* acentúa que el uso de frecuencias relativas, probabilidades y porcentajes para representar grados variables de incertidumbre, no resulta natural.
La probabilidad y la estadística son unas de las grandes ausentes de la escuela, tanto primaria como media. A pesar de ello, los alumnos disponen de conocimientos –muchos de ellos intuitivos- que utilizan a la hora de resolver problemas.

Hay varios conceptos probabilísticos que resultan complejos de comprender, y uno de ellos es el de independencia. La simplicidad de su definición matemática *(7)* no se condice con la dificultad que acarrea su comprensión para la mayoría de la gente. Algunos investigadores afirman que se trata de un concepto de naturaleza teórica cuya aplicación a situaciones concretas crea problemas. Un ejemplo famoso es la llamada "falacia del apostador": cuando se tiran monedas, muchas personas creen que luego de salir varias veces caras, la probabilidad de obtener ceca aumenta. En nuestro país existen encuestas de "números atrasados", que informan cuáles son los números que hace tiempo que no obtienen premios en la lotería, bajo el supuesto de que tendrían mayor probabilidad de salir. *"Dichos razonamientos se basan en la creencia de que el azar funciona como un mecanismo auto-correctivo en el que una desviación en una dirección es rápidamente equilibrada por una desviación en la dirección contraria" . (8)*

Esta falacia se puede constituir en un obstáculo en la comprensión del significado de la estabilidad de las frecuencias relativas, al considerar que la estabilidad se puede dar en series limitadas de experimentos.
Los dos ejemplos (la probabilidad de ceca dado que salieron varias caras y la probabilidad de un "número atrasado") son, sin embargo, de naturaleza diferente. En el caso de la moneda interviene un elemento externo (moneda) que no es ideal y allí es donde se deja la puerta abierta para la intuición. Si la moneda no es perfecta, no está totalmente balanceada (y ninguna moneda real lo está), entonces seguramente la probabilidad de cara y ceca no será de $\frac{1}{2}$. Los razonamientos estocásticos, matemáticos e intuitivos entran en colisión.
Green *(9)* afirma que:

> *"…Hay dos tendencias opuestas que operan aquí: la maduración y la adquisición de experiencia versus el dominio del pensamiento mecánico y determinístico que intenta dar explicaciones estrictamente causales para todo y no deja espacio para el azar."*

No debería entonces llamarnos la atención que los alumnos presenten dificultades en los razonamientos vinculados al azar si los que prevalecen en la escuela son los determinísticos, causales. El razonamiento probabilístico y estadístico tienen sus características que lo diferencian del aritmético, geométrico, funcional, algebraico, etc. Por ejemplo, en un experimento determinístico el resultado es siempre el mismo (por ejemplo, un cálculo) e incluso tiene la propiedad de la reversibilidad (puede volverse al estado inicial). En el caso de experimentos aleatorios es posible obtener resultados diferentes cada vez que se los realiza y no son reversibles.
No es, por lo tanto, tarea del alumno adquirir este tipo de pensamiento por sí solo. No es posible.

(5) Eichler, Andreas (2007). Op. Cit.
(6) Gigerenzer, (2000). Op. Cit.
(7) A y B son sucesos no vacíos y $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ si y solo si A y B son independientes.
(8) Serradó, Ana, Cardeñoso, José Mª y Azcárate, Pilar, (2005). Op. Cit
(9) Green (1982). Op. Cit.

Entonces, frente a la falta de herramientas, utiliza las que tiene. Y en los problemas de probabilidades, los contextos muy cercanos funcionan muchas veces como un obstáculo para la comprensión, para la utilización de modelos matemáticos. Es por eso que prevalece la intuición por sobre lo matemático.
Creemos que la escuela tiene que hacerse cargo de cuestionar las respuestas que provienen de la intuición, ponerlas en duda para que el alumno se vea obligado a buscar explicaciones por fuera de “lo que le parece”.
Una cuestión no desdeñable es la del lenguaje. En lo que se refiere a las probabilidades, los términos usados suelen ser de dos tipos:

- Términos que aparecen en la matemática y en el lenguaje ordinario, aunque no siempre con el mismo significado en los dos contextos, como límite o convergencia.
- Palabras que tienen significados iguales o muy próximos en ambos contextos, como probable.

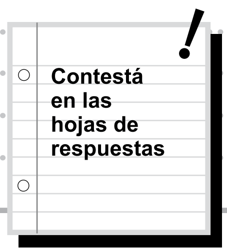
Si los alumnos no están muy familiarizados por el uso, muchas de las palabras de la segunda categoría pasarán a formar parte de la primera, lo que podrá crear dificultades de comunicación en el aula.
¿Qué hacer frente a todos estos obstáculos?
Una opción es proponer situaciones provenientes de otras disciplinas que aborden el azar, donde se yuxtaponen y contraponen las miradas y explicaciones determinísticas y probabilísticas. Por ejemplo, en Biología, la relación entre la genética y la estadística, en Geografía, los pronósticos del tiempo, en Economía, los mercados de valores y en Ciencias Sociales, resultados de encuestas o elecciones. Los problemas de los libros de texto suelen apoyarse más en los cálculos matemáticos que en el razonamiento estadístico y no parecen ayudar a que éste evolucione.

El problema que se presentó en la evaluación es el siguiente:

30

Disco 1 Disco 2

El disco 1 está dividido en 8 partes iguales y el disco 2 en 4. Cada vez que gira la flecha cae en una de las regiones marcadas.
Joaquín dice que la probabilidad de que la flecha caiga en un número par es mayor en el disco 2 que en el disco 1.¿Está equivocado? ¿Por qué?



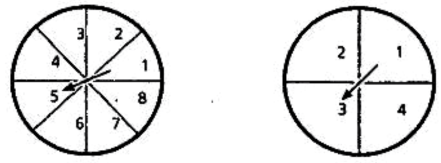
El problema pone al alumno a decidir entre dos conceptos que suelen confundirse: los de frecuencia absoluta y probabilidad. Es decir, si bien hay más números pares en el primer disco que en el segundo, la cantidad en ambos está en la misma proporción:

es la mitad. Debido a ello, la probabilidad de que la flecha caiga en un número par es la misma en los dos discos.

Ejemplo 1

En estos dos casos, analizando respuestas obtenidas vemos que los alumnos responden correctamente a partir de fundamentaciones diferentes. El primero de ellos calcula ambas probabilidades y verifica que se corresponden a fracciones equivalentes. El otro propone un análisis en términos de las cantidades de números pares e impares en cada disco. Como en cada uno hay la misma cantidad de números pares e impares, habrá la misma probabilidad de que la flecha se detenga en un número par (y también en uno impar). A partir de aquí también podría generalizarse esta observación a cualquier disco que tenga la misma cantidad de pares e impares (3 y 3, 5 y 5, 9 y 9, etc.)

30

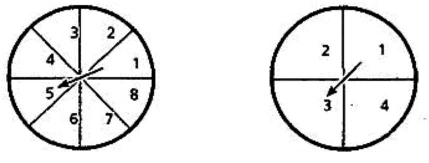


Disco 1 **Disco 2**

El disco 1 está dividido en 8 partes iguales y el disco 2 en 4. Cada vez que gira la flecha cae en una de las regiones marcadas.
Joaquín dice que la probabilidad de que la flecha caiga en un número par es mayor en el disco 2 que en el disco 1. ¿Está equivocado? ¿Por qué?

En el disco 1 la probabilidad de que la flecha caiga en un nimero par es de $2/4$ y en el disco 2 la pro-babilidad es de $1/2$, en consecuencia las probabilidades son las mismas

30



Disco 1 **Disco 2**

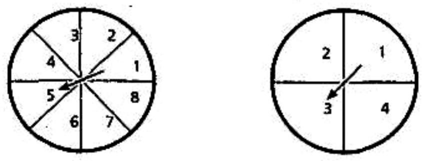
El disco 1 está dividido en 8 partes iguales y el disco 2 en 4. Cada vez que gira la flecha cae en una de las regiones marcadas.
Joaquín dice que la probabilidad de que la flecha caiga en un número par es mayor en el disco 2 que en el disco 1. ¿Está equivocado? ¿Por qué?

Si, esta equivocado porque las probabilidades son iguales en los dos discos ya que tienen la misma cantidad de números pares e impares.

Ejemplo 2

Algunos alumnos vinculan la probabilidad solo con la cantidad de casos favorables o frecuencia absoluta, como el caso del siguiente alumno. Para él, es más probable que salga un número par en el primer disco porque hay más números pares. No tiene en cuenta estas cantidades en relación a la cantidad total de posibilidades, es decir la probabilidad como proporción.

30



Disco 1 **Disco 2**

El disco 1 está dividido en 8 partes iguales y el disco 2 en 4. Cada vez que gira la flecha cae en una de las regiones marcadas.
Joaquín dice que la probabilidad de que la flecha caiga en un número par es mayor en el disco 2 que en el disco 1. ¿Está equivocado? ¿Por qué?

Si, está equivocado porque hay mas probabilidades de que la flecha caiga en un numero par en el disco N° 1, porque hay 4 números pares mientras q' en el Disco 2 hay solamente 2 números pares.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Tener la posibilidad de reflexionar acerca de los orígenes de los “errores” que cometen los alumnos a la hora de resolver problemas permite tener la posibilidad de operar sobre ellos. Muchos de nosotros solemos culpar a los alumnos de los malos resultados que obtienen, sin embargo vale la pena preguntarnos si les hemos ofrecido posibilidades de construir los conocimientos, entendiendo por esto brindarles variedad de problemas, diferentes sentidos y la búsqueda de razones que les dan sustento.

Si nuestros alumnos resuelven los problemas de manera mecánica, sin saber qué están haciendo ni por qué, entonces no tienen control sobre lo que hacen. Las herramientas que permiten controlar la propia producción se aprenden y se enseñan. ¿Lo hacemos?

BIBLIOGRAFÍA

Acuña, C. (2005). ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, marzo, Vol. 8, Número 001. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Distrito Federal, México. Pp. 7-23.

Butlen, Denis y Pézard, Monique. (1991). Un Enseignement de Didactique des Mathématiques a des Futurs Instituteurs-Maitres-Formateurs. Document de Travail pour la Formation des Enseignants N° 4. IREM. Université Paris VII.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique a l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. 2e partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation. Petit X, 19, 43-72

Comin, Eugène. (2002). Les Difficultés D'Enseignement de la Proportionnalité à L'Ecole et au Collège. DidmaR: Séminaire de didactique des mathématiques. Université Rennes 1. http://www.didmar.univ-rennes1.fr/seminaire/Actes/20012002/Comin.pdf

Crippa, Ana Lía (Coordinación general), Novembre, Andrea y Ponce, Héctor. (2007). Matemática. Estudiar geometría y pensar su enseñanza. Curso virtual de CePA a distancia. http://campus.cepa.edu.ar/course/enrol.php?id=59

Drohuard, Jean-Philippe (1999). Necessary Mathematical Statements and Aspects of Knowledge in the Classroom. Philosophy of Mathematics Education Journal 11 (1999). Obtenido en http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome11/art8.htm (octubre 2009).

Eichler, Andreas. (2007). The impact of a typical classroom practice on students' Statistical knowledge. Universität Münster. Cerme 5 Proceedings.

Engel, Joachim. Sedlmeier, Peter (2005). On middle-school students' comprehension of randomness and chance variability in data. The International Journal on Mathematics Education, ZDM 2005 Vol. 37 (3)

Gigerenzer, G. (2000). Adaptive Thinking. Rationality in the Real World. Oxford University Press.

Green, D. R. (1982): A Survey of Probability Concepts in 3000 Students aged 11-16 Years. En D. R. Grey (ed.), Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics, Teaching Statistics Trust, University of Sheffield, 766-783.

Hebert, E. (1993). « Les Œufs ». Entretiens sur la modélisation algébrique en classe de seconde. Cahier de DIDIREM 20. Juin 1993.

Hersant, Magali. (2001). Interactions Didactiques et Pratiques D'Enseignement, Le Cas de la Proportionnalité au Collège. Thèse pour l'obtention du Diplôme de Docteur de l'Université Paris 7. Université Paris 7. Denis Diderot.

Joint ICMI/IASE Study. Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. Discussion Document. The International Journal on Mathematics Education, ZDM 2006 Vol. 38 (6)

Lecoutre, Marie-Paule, Rovira, Katia, Lecoutre, Bruno y Poitevineau, Jacques, (2006). PEOPLE'S INTUITIONS ABOUT RANDOMNESS AND PROBABILITY: AN EMPIRICAL STUDY. Statistics Education Research Journal, 5(1), 20-35, http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

International Association for Statistical Education (IASE/ISI), May, 2006

Novembre, Andrea (Coord.), Chelle, Teresita, García, Patricia, Robalo, Gloria, Sancha, Inés y Wall, Cecilia. (2009). Cálculo Mental y Algorítmico. Dirección General de Cultura y Educación. Subsecretaría de Educación. Dirección Provincial de Educación Primaria. Dirección de Gestión Curricular. "Mejorar los aprendizajes". Área: MATEMÁTICA. www.abc.gov.ar (Octubre de 2009)

Péault, Hervé. (1992). Proportionnalité. En Documents pour la Formation des Professeurs D'Ecole en Didactique des Mathématiques. Tome II. COPILEREM

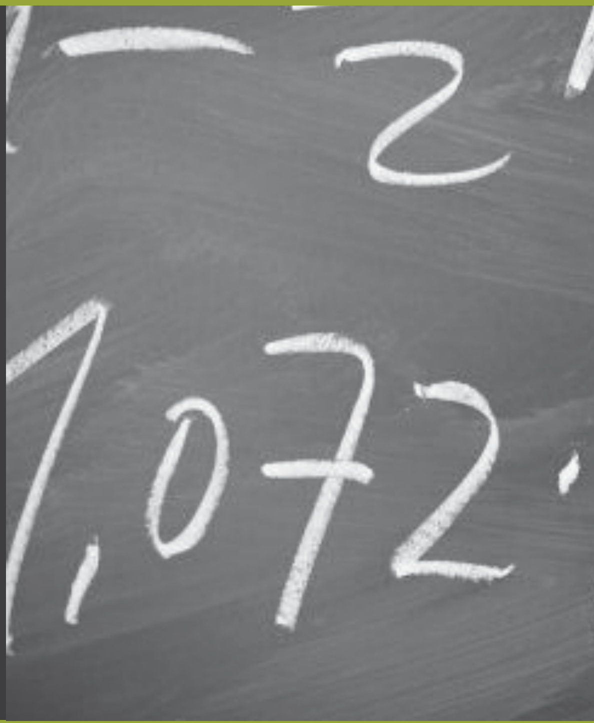
Pézard, Monique. (1985). A propos de l'enseignement de la Proportionnalité. Cahier de Didactique des Mathématiques. Numéro 20. IREM. Université Paris VII.

Rosar, Dominique, Van Nieuwenhoven, Catherine y Jonnaert, Philippe. (2007). Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves? http://spip.cslaval.qc.ca/mathvip/article.php3?id_article=61

Sadovsky, Patricia (2005). Enseñar Matemática Hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Editorial El Zorzal. Buenos Aires, Argentina.

Serradó, Ana, Cardeñoso, José Mª y Azcárate, Pilar, (2005). Los Obstáculos en el Aprendizaje del Conocimiento Probabilístico: Su Incidencia desde los Libros de Texto.6Statistics Education Research Journal, 4(2), 59-81, International Association for Statistical Education (IASE/ISI), Nov, 2005. http://www.stat.auckland.ac.nz/serj

Tiberghien, Andrée (SCIENTIFIQUE Responsable). (2002). Des Connaissances Naïves au Savoir, UMR GRIC, CNRS – Université Lumière Lyon 2. Synthèse commandée par le programme "École et sciences cognitives". http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/00/17/89/PDF/Tiberghien.pdf



Ministerio de
Educación
Presidencia de la Nación

DiNIECE
Dirección Nacional de
Información y Evaluación
de la Calidad Educativa