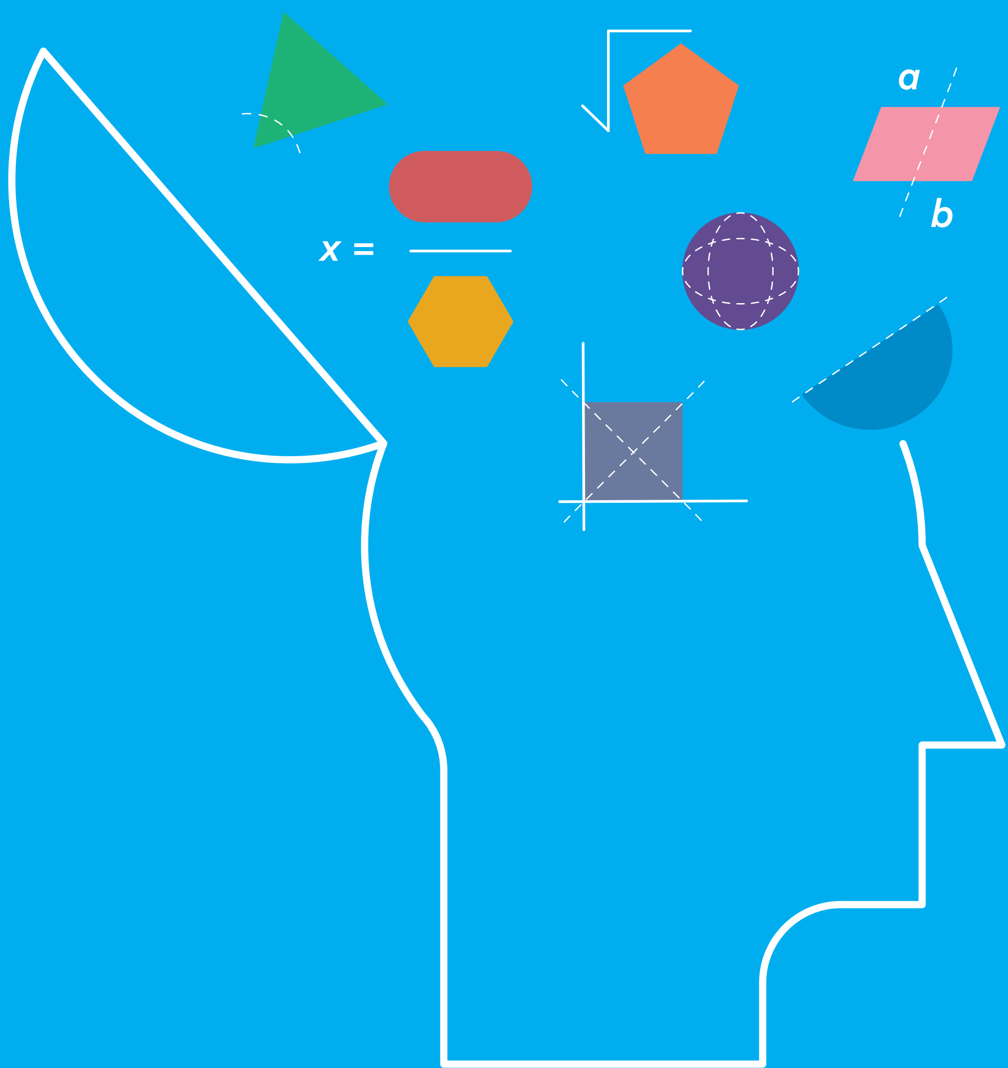
Fundación "la Caixa"

Enseñar *matemáticas* en educación primaria y primer año de secundaria



Guía

EduCaixa

Edición
Fundación ”la Caixa”

Autoría
Steve Higgins, Thomas Martell, David Waugh, Peter Henderson y Jonathan Sharples

Diseño gráfico
Interprint Disseny i Producció Gràfica

Traducción al castellano y revisión lingüística
Montse Alberte y EduCaixa

Impresión
Pressing Impressió Digital, S.A.

Pl. de Weyler, 3 - 07001 Palma

DL: B 6578-2023

EduCaixa tiene como objetivo contribuir a la calidad educativa de nuestro país a través de la educación basada en evidencias. Para lograrlo, colabora de manera estrecha con la **Education Endowment Foundation (EEF)** y su red internacional de socios, de la que forma parte.

Entre las acciones de esta colaboración se incluye la difusión de una serie de guías para docentes elaboradas por especialistas de la EEF, que recogen recomendaciones clave, resultantes del metanálisis de estudios sobre prácticas educativas.

Esta guía para docentes está basada en la segunda edición de la guía ***Improving Mathematics in Key Stages 2 and 3*** producida por la EEF. El contenido original ha sido modificado para adaptarse al contexto español cuando ha sido necesario.

Para descargar la guía en formato digital accede a:
www.educaixa.org/es/guias-docentes

Education
Endowment
Foundation

Índice

Prólogo

El desarrollo del pensamiento matemático es clave para el bienestar de los niños, niñas y jóvenes. Es crucial que nuestros estudiantes desarrollen el razonamiento matemático, la capacidad de resolución de problemas o la de interpretación de datos, ya que les da las herramientas para enfrentarse a un mundo cada vez más complejo.

Para lograrlo, es importante identificar qué prácticas y estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas parecen prometedoras y tienen un impacto positivo en el alumnado. Esta guía describe de manera práctica y concisa ocho recomendaciones basadas en las mejores evidencias disponibles. Estas recomendaciones son útiles para todo el alumnado, especialmente aquel que experimenta mayores dificultades con las matemáticas.

Esta publicación forma parte de la colección de guías docentes que EduCaixa ha publicado gracias a la colaboración con la Education Endowment Foundation (EEF). Nuestro objetivo común es mejorar la equidad y calidad educativa acercando a los docentes y a los centros aquellas evidencias disponibles sobre temáticas relevantes en nuestro contexto escolar.

Esperamos que esta guía ayude a mejorar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas de los centros educativos. Es importante recordar que cada contexto escolar es único y, por tanto, es necesario adaptar las recomendaciones a las características particulares a cada uno de ellos. Animamos a la comunidad educativa a reflexionar y a hacer suyas estas recomendaciones.

Fundación "la Caixa"

Introducción

¿Qué *incluye* esta guía?

Esta guía se centra en la enseñanza de las matemáticas a alumnos de primero de educación primaria a primero de educación secundaria. Decidimos centrarnos en estos cursos teniendo en cuenta las opiniones de profesores, académicos y otras partes interesadas, quienes señalaron que se trata de cursos en los que se podría lograr un mayor impacto, ya que no solo los centros educativos quieren asesorarse sobre los cambios en los modelos educativos, sino que les preocupa mucho la transición del alumnado de primaria a secundaria.

Esta guía no pretende ser una referencia exhaustiva para la enseñanza de las matemáticas. En ella presentamos recomendaciones, respaldadas por investigaciones, que los centros educativos pueden aplicar para cambiar significativamente el proceso de aprendizaje del alumnado, y nos hemos centrado en las cuestiones que, al parecer, son más relevantes para los profesionales de la comunidad educativa. Por tanto, no todos los aspectos de la enseñanza de las matemáticas quedan cubiertos por esta guía. Para tales aspectos, los profesores deben servirse de sus conocimientos de matemáticas y su experiencia y criterio profesional, así como de la evaluación de los conocimientos y la comprensión de sus alumnos.

El objetivo es mejorar la calidad de la enseñanza. Enseñar matemáticas con excelencia requiere conocer bien los contenidos, pero no basta con eso. Los profesores que aportan excelencia saben, además, cómo aprende matemáticas el alumnado y qué le puede costar más; y saben, también, cómo enseñar matemáticas de una manera más eficaz.[1] La guía se basa en el análisis de las evidencias sobre la enseñanza eficaz de las matemáticas, aportadas por Jeremy Hodgen, Colin Foster y Rachel Marks.

Por tanto, no se trata de un nuevo estudio en sí mismo, sino más bien de un resumen de la investigación ya existente, con orientaciones claras y factibles. Al final de la guía se ofrece más información sobre el proceso de su elaboración.

¿A *quién* va dirigida la guía?

Esta guía se dirige principalmente a los jefes de departamento, los directores y otros profesionales responsables de impulsar mejoras en la enseñanza de las matemáticas en los centros de educación primaria y secundaria. Para los profesores titulares y los auxiliares puede ser un recurso útil de cara a su actividad docente diaria. También puede ser de interés para:

- Miembros del equipo directivo y las familias, para apoyar al equipo docente y plantearles nuevos retos.
- Diseñadores de programas para fundamentar planes formativos docentes e intervenciones para el alumnado.

Actuaciones según la guía

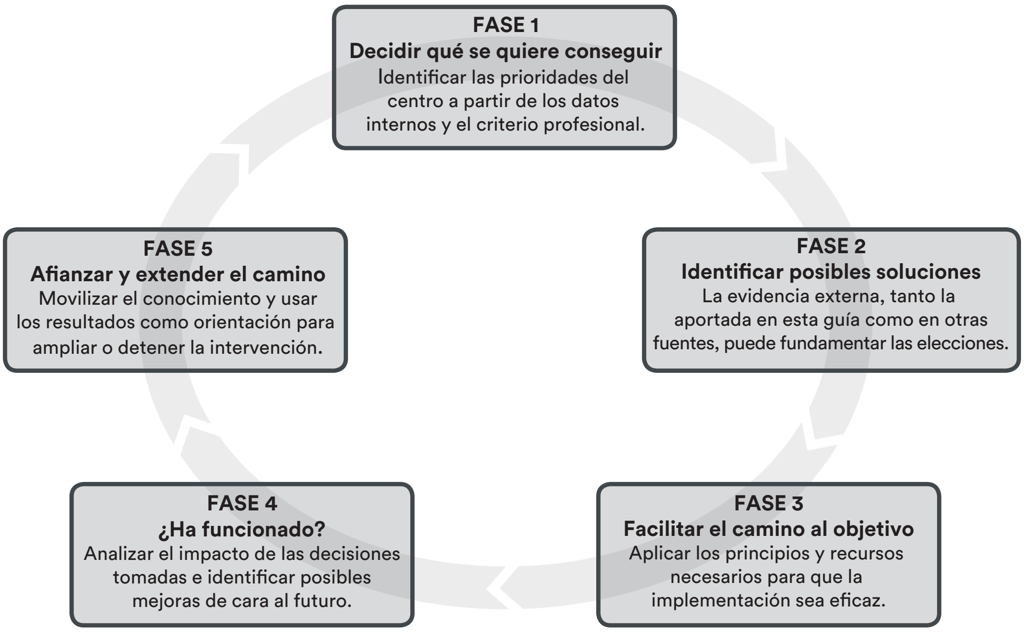
Somos conscientes de que implementar estas recomendaciones con eficacia —que realmente tengan efecto en el alumnado— es un proceso crucial a la vez que complejo. Para ello, deben tenerse en cuenta los principios siguientes:

1. El desarrollo profesional continuo es un factor importante y fundamental para mejorar la calidad de la enseñanza y los conocimientos del profesor.
2. Estas recomendaciones no ofrecen una solución universal. Es importante tener en cuenta el delicado equilibrio que existe entre implementar rigurosamente las recomendaciones y aplicarlas adecuadamente en el contexto específico de un centro educativo. Por ello, implementar las recomendaciones de forma eficaz requiere analizar minuciosamente el contexto y aplicar el buen criterio profesional.
3. Es fundamental tener presente toda la información que se ofrece sobre las recomendaciones. Por ejemplo, los centros educativos no deben utilizar la Recomendación 7 para justificar gastos relacionados con la realización de numerosas intervenciones. Al contrario, dicha recomendación debería hacer reflexionar sobre cuáles son las intervenciones más adecuadas.
4. Inevitablemente, los cambios requieren tiempo. Por ello, recomendamos dedicar, al menos, dos trimestres a planificar, desarrollar y probar estrategias a pequeña escala antes de implantar nuevas prácticas en todo el centro. Es importante, además, contar con apoyo para realizar el cambio en todo el centro, así como dedicar regularmente, a lo largo del curso, cierto tiempo al proyecto y a la revisión de su progreso.

¿Qué ayuda se ofrece a los usuarios de esta guía?

EduCaixa, a través del programa HelloMath!, ha puesto en marcha dos iniciativas para la mejora de la enseñanza de las matemáticas basada en la investigación, en las que colabora con universidades y especialistas en educación matemática nacionales e internacionales. Por un lado, el programa de formación docente «Atrévete con la creatividad matemática», un ciclo de mejora de la práctica docente enriquecida por la evidencia; y, por otro, «MAPS-Caminos matemáticos en el pensamiento computacional», un proyecto de investigación sobre las relaciones entre las matemáticas y el pensamiento computacional, financiado por el EEF, en asociación con la BHP Foundation, como parte del proyecto «Building en global evidence ecosystem for teaching».

Figura 1: Ciclo de mejora educativa basado en la evidencia



Para más información, pincha aquí o escanea el QR.

Resumen de las *recomendaciones*

Recomendación 1

Utilizar la *evaluación* como base para ampliar los conocimientos y la comprensión del alumnado

- La evaluación debe servir no solo para realizar un seguimiento del aprendizaje del alumnado, sino también para que los profesores dispongan de información sobre qué saben y qué no sabe el alumnado.
- Con esta información, se pueden planificar las siguientes clases y determinar el tipo de apoyo que se precisa.
- El *feedback* efectivo por parte del profesorado será un elemento importante derivado de la evaluación.
- El *feedback* debe ser específico y claro, fomentar y favorecer un mayor esfuerzo por parte del alumno, y darse con moderación.
- Los profesores no solo tienen que abordar los conceptos erróneos, sino también entender por qué el alumnado puede seguir cometiendo errores.
- Conocer los conceptos erróneos más comunes es de gran utilidad al planificar las clases, porque permite abordarlos de forma anticipada.

Recomendación 2

Utilizar materiales *manipulativos* y *representaciones*

- Los materiales manipulativos (objetos utilizados para enseñar matemáticas) y las representaciones (como rectas numéricas y gráficas) pueden servir para despertar el interés del alumnado por las cuestiones matemáticas.
- Sin embargo, los manipulativos y las representaciones son solo herramientas; lo esencial es la manera en que se utilizan.
- Hay que usarlos adecuadamente y con un fin específico para que sean efectivos.
- Debe haber una razón que justifique el uso de un determinado manipulativo o representación. para enseñar un concepto matemático concreto.
- El uso de los manipulativos debe ser temporal, a modo de «andamiaje» que se puede suprimir cuando ya se ha alcanzado un cierto grado de autonomía.

Recomendación 3

Enseñar estrategias de *resolución de problemas*

- Cuando el alumnado debe resolver un problema para el cual no dispone de un método ya conocido, necesita utilizar estrategias de resolución de problemas para encontrarle sentido a esa situación desconocida.
- Seleccionar tareas de resolución de problemas para aquel alumnado que no dispone de soluciones preestablecidas.
- Enseñarles a usar y comparar distintos enfoques.
- Enseñarles cómo cuestionar y utilizar los conocimientos de los que ya disponen para resolver problemas.
- Utilizar ejemplos resueltos para que puedan analizar las diferentes estrategias aplicadas.
- Pedir al alumnado que analice cómo resuelve los problemas, reflexione al respecto y lo exprese.

Recomendación 4

Favorecer el desarrollo de una amplia red de *conocimientos matemáticos* en el alumnado

- Destacar las numerosas conexiones entre las operaciones, los procedimientos y los conceptos matemáticos.
- Asegurarse de que el alumnado recuerda con fluidez las operaciones matemáticas sencillas.
- Enseñar al alumnado a entender los procedimientos.
- Enseñar al alumnado a elegir de forma consciente entre las distintas estrategias matemáticas.
- Partir de lo que el alumnado entiende sobre el reparto y la proporcionalidad para introducir procedimientos.
- Enseñar al alumnado que las fracciones y los decimales amplían el sistema numérico más allá de los números enteros.
- Enseñar al alumnado a reconocer y utilizar las estructuras matemáticas.

Recomendación 5

Fomentar la *autonomía* y la *motivación* en el alumnado

- Incentivar al alumnado para que se responsabilice de su propio aprendizaje y se implique más en el proceso.
- Para ello, el alumnado debe desarrollar la metacognición: la capacidad de planificar, analizar y evaluar el pensamiento y el aprendizaje propios.
- Al principio, es posible que los profesores tengan que ejemplificar la metacognición describiendo su propio pensamiento.
- Crear oportunidades para que el alumnado desarrolle la metacognición, y motivarlos a que expliquen su proceso cognitivo, tanto a sí mismos como a los demás.
- Evitar avanzar en exceso antes de que corresponda.
- Las actitudes positivas son importantes, pero son pocas las evidencias sobre la mejor manera de potenciarlas.
- El equipo directivo debe velar por que todo el personal, incluido el equipo no docente, fomente que el alumnado pueda disfrutar con las matemáticas.

Recomendación 6

Utilizar tareas y recursos para estimular y *mejorar el conocimiento matemático* del alumnado

- Las tareas y los recursos son solo herramientas, y no serán eficaces si el profesor los usa de forma inadecuada.
- Tener en cuenta las evaluaciones de los puntos fuertes y débiles del alumnado como criterio para elegir las tareas.
- Utilizar las tareas como medio para abordar los conceptos erróneos.
- Dar ejemplos y contraejemplos de conceptos.
- Plantear situaciones y problemas que sirvan para que el alumnado entienda las matemáticas.
- Hacer tareas en las que se desarrolle el conocimiento conceptual junto con el procedimental.
- La tecnología no es una fórmula mágica: debe usarse con sensatez, y hay recursos menos costosos que pueden ser igual de eficaces.

Recomendación 7

Utilizar *intervenciones estructuradas* como refuerzo educativo

- La selección de las intervenciones debe basarse en la evaluación del alumnado.
- Las intervenciones deben iniciarse en etapas tempranas, basarse en la evidencia y estar detalladamente planificadas.
- Las intervenciones deben incluir enseñanza explícita y sistemática.
- Incluso la intervención mejor diseñada no funcionará si no se implementa adecuadamente.
- Ayudar al alumnado a que entienda cómo se vinculan las intervenciones y las clases con todo el grupo.
- Las intervenciones deben ser motivadoras para el alumnado, que no les parezcan aburridas ni les generen ansiedad.
- Si el alumnado, a causa de las intervenciones, no pueden participar en actividades que les gustan, o se pierden contenidos que necesitan aprender, los profesores deben plantearse si realmente son necesarias las intervenciones.
- Evitar la fatiga derivada de la intervención. Las intervenciones eficaces no tienen por qué ser siempre prolongadas o intensivas.

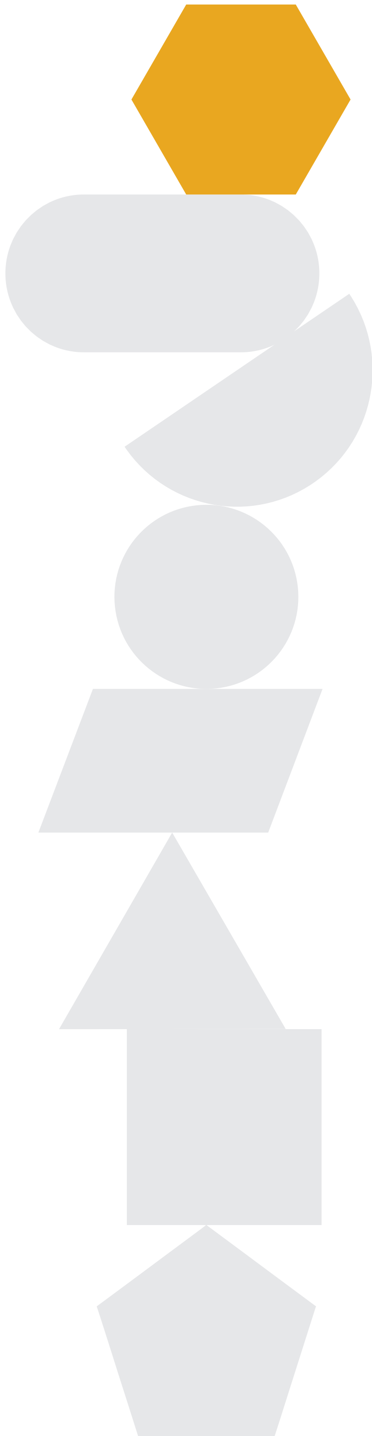
Recomendación 8

Acompañar al alumnado para favorecer su *transición de primaria a secundaria*

- Con el cambio de primaria a secundaria, el rendimiento en matemáticas baja notablemente y la actitud hacia las matemáticas empeora.
- Los centros de primaria y de secundaria deben compartir la misma concepción del currículo, la enseñanza y el aprendizaje.
- El alumnado de 1.º de secundaria toma conciencia rápidamente de sus puntos fuertes y débiles.
- Puede ser necesario llevar a cabo intervenciones estructuradas con el alumnado de 1.º de secundaria al que le cueste avanzar.
- Analizar con detalle la distribución del alumnado en las clases de matemáticas.
- Es probable que el entorno provoque un aumento en la disparidad de rendimiento entre los alumnos desfavorecidos y sus compañeros, porque los primeros tienen más probabilidades de ser asignados a grupos con un nivel más bajo.

Recomendación 1

Utilizar la *evaluación* como base para ampliar los conocimientos y la comprensión del alumnado



Recomendación 1

Utilizar la *evaluación* como base para ampliar los conocimientos y la comprensión del alumnado

Puede considerarse que los conocimientos y la comprensión en el ámbito de las matemáticas están formados por diversos componentes, y que es muy posible que algunos de estos componentes sean puntos fuertes y otros sean puntos débiles.[2] Por ello, es importante que la evaluación no sirva solo para hacer un seguimiento del aprendizaje del alumnado, sino que también aporte a los profesores información detallada y actualizada sobre lo que el alumnado sabe y lo que no sabe. Con esta información, los profesores pueden adaptar sus clases para ampliar los conocimientos ya adquiridos por el alumnado, atender sus puntos débiles y centrarse en los pasos que deben dar para avanzar. Los exámenes pueden ser una fuente de información, pero la evaluación también puede fundamentarse en la evidencia obtenida mediante otras pruebas, la observación no estructurada del alumnado o conversaciones sobre matemáticas con ellos. Para más información sobre cómo llevar a cabo una evaluación útil y precisa, consúltese la guía Retroalimentación formativa publicada por EduCaixa.

Actuar a partir de la *evaluación*

Conocer los puntos fuertes y débiles del alumnado es la base a partir de la cual los profesores pueden planificar las clases siguientes y determinar el tipo de apoyo que se precisa (véase la Recomendación 7). Podría ser necesario que los profesores cambiaran de enfoque si el adoptado en primera instancia no acaba de funcionar. El *feedback* efectivo por parte de los profesores será un elemento importante derivado de la evaluación. Sus características más relevantes son las siguientes:[3]

- **Ser específico, preciso y claro** (p. ej., «Ahora factorizas de manera eficaz los números, extrayendo primero los factores más altos», en lugar de: «Cada vez factorizas mejor»).
- **Proporcionar *feedback* con moderación para que sea significativo** (p. ej., «Uno de los ángulos que has calculado en este problema no es correcto. A ver si puedes encontrarlo y corregirlo»).
- **Comparar lo que un alumno o alumna hace bien ahora con lo que hacía mal antes** (p. ej., «Ahora redondeas las soluciones con mucha más precisión de lo que lo hacías»).
- **Fomentar y apoyar el esfuerzo** del alumnado ayudándolos a identificar aquello que les cuesta más y en lo que deben poner más atención (p. ej., «Tienes que esforzarte más en comprobar que el resultado tiene sentido y es un valor razonable»).
- **Indicar al alumnado cómo pueden responder a los comentarios de los profesores**, y dejarles tiempo para que lo hagan.

- **Dar indicaciones específicas al alumnado sobre cómo mejorar**, en vez de señalar únicamente cuándo se equivocan (p. ej., «Cuando no estés seguro de cómo sumar y restar, prueba a poner los números en una recta numérica», en lugar de «El resultado debería ser –3 y no 3»).

El *feedback* tiene que ser efectivo. Los centros educativos deben velar por que su voluntad de proporcionar *feedback* efectivo no dificulte el proceso de evaluación y calificación del alumnado ni comporte una pesada carga de trabajo para los profesores.[4] El *feedback* efectivo se puede dar oralmente, no como una calificación por escrito. En la web de la EEF puede consultarse el documento A *Marked Improvement*, en el que se presentan evidencias sobre los distintos sistemas de calificación y cómo estos afectan a la carga de trabajo.

Abordar los *conceptos* erróneos

Un concepto erróneo es una interpretación que da lugar a un «patrón de errores sistemático».[5] A menudo, los conceptos erróneos se forman al aplicar un conocimiento en un contexto inadecuado. Por ejemplo, el concepto de que «el resultado de la multiplicación es un número mayor; y el de la división, un número menor» es aplicable a los números enteros positivos mayores que 1. Pero, más adelante, cuando se introducen otros conceptos matemáticos (p. ej., los números iguales o inferiores a 1), este concepto, trasladado a un contexto que no es adecuado para él, se convierte en un concepto *erróneo*.*

Es importante detectar y abordar los conceptos erróneos, y no eludirlos o ignorarlos. Con frecuencia, el alumnado defiende sus conceptos erróneos, sobre todo si se basan en ideas razonables pero limitadas. En tales casos, los profesores pueden pensar en cómo se ha creado el concepto erróneo, y analizar con el alumnado la «parte de verdad» en la que se basa y las circunstancias en las que no es aplicable.[6] Los contraejemplos pueden servir para poner en duda la convicción del alumnado sobre el concepto erróneo. No obstante, es posible que necesiten tiempo y el apoyo del profesor para desarrollar conceptos más amplios y sólidos.

Conocer los errores más comunes en matemáticas puede ser muy valioso al diseñar la evaluación, actuar a partir de esta y anticipar las dificultades que probablemente tendrá el alumnado.[7] Los profesores que conocen los conceptos erróneos más comunes pueden planificar las clases para abordarlos antes de que se presenten, por ejemplo, comparando ejemplos y contraejemplos al enseñar conceptos nuevos. Un contraejemplo es todo aquello que no es un ejemplo del concepto.

Resumen de las evidencias

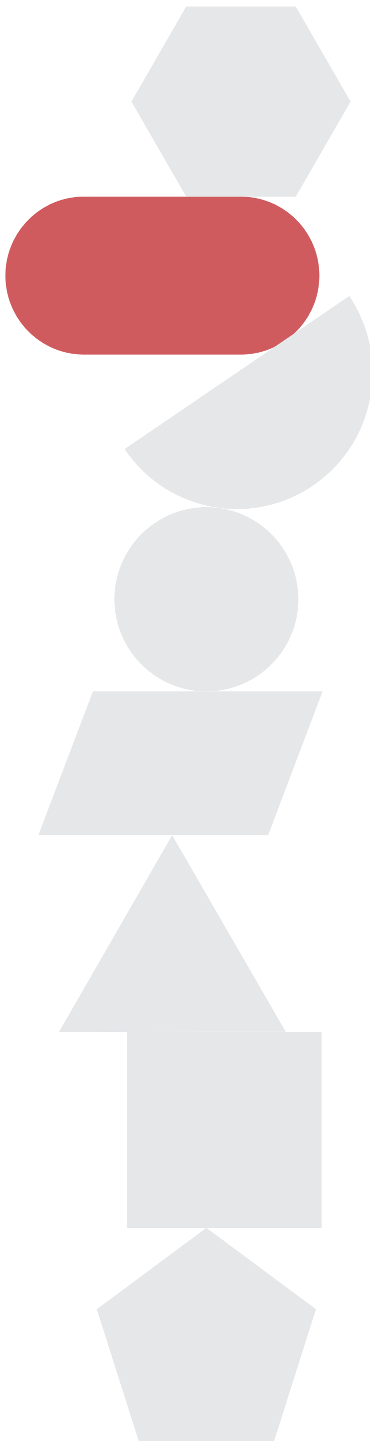
- Se considera, por lo general, que el *feedback* produce un gran efecto en el aprendizaje. Al revisar la literatura, se encontraron dos metanálisis que indican que los efectos del *feedback* en matemáticas son similares a los que se observan en otras asignaturas. Hay mucha variabilidad en dichos efectos, y el *feedback* puede influir mucho, tanto negativa como positivamente, en el aprendizaje.
- Se dispone de estudios detallados sobre los conceptos erróneos que a menudo se forma el alumnado al aprender matemáticas.

* Para más información sobre los conceptos erróneos y los malentendidos más comunes entre el alumnado sobre distintos temas de matemáticas, pueden consultarse las fuentes siguientes:

- Hansen, A. (ed.) (2017). Children's Errors in Mathematics (4a ed.). Londres: Sage.
- Ryan, J., y Williams, J. (2007). Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions. McGraw-Hill Education.
- Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., y McCartney, M. (1981). Children's understanding of mathematics: 11-16. Londres: John Murray.

Recomendación 2

Utilizar materiales *manipulativos* y *representaciones*



Recomendación 2

Utilizar materiales *manipulativos* y *representaciones*

Los materiales manipulativos y las representaciones pueden resultar muy útiles para motivar al alumnado en relación con las cuestiones matemáticas. Sin embargo, son solo herramientas; lo importante es la manera en que se utilizan. Hay que usarlos adecuadamente y con un fin específico para que sean efectivos.[8] Los profesores deben tener una razón que justifique el uso de un determinado manipulativo o representación para enseñar un concepto matemático concreto. El objetivo es utilizar materiales manipulativos y representaciones para demostrar estructuras matemáticas y favorecer que el alumnado aprenda y utilice las matemáticas de forma autónoma.

Cuadro 1: ¿Qué son los materiales manipulativos y las representaciones?

Un manipulativo es un objeto que el alumnado y el profesorado pueden tocar y mover, y que se usa como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Entre los manipulativos más utilizados se encuentran las regletas de Cuisenaire, los bloques lógicos de Dienes y los policubos.

Una representación es una forma particular de presentar las matemáticas.[9] Algunos ejemplos de representaciones son:

- Dos fracciones representadas en una recta numérica.
- Una función cuadrática expresada algebraicamente o presentada visualmente como una gráfica.
- Una distribución de probabilidad presentada en una tabla o representada en un histograma.

¿Cómo usar los *manipulativos* de forma eficaz?

Los manipulativos se pueden utilizar en todos los cursos, de primero de primaria a primero de secundaria. Las evidencias indican que los siguientes aspectos son fundamentales:

- Debe haber una razón que justifique el uso de un determinado manipulativo o representación para enseñar un concepto matemático concreto. Los manipulativos se tienen que utilizar para facilitar la comprensión de conceptos matemáticos cada vez más complejos.
- Favorecer que el alumnado entienda la relación entre los manipulativos y las cuestiones matemáticas que representan.[10] Para ello, los profesores deben fomentar que el alumnado relacione los materiales (y cómo se manipulan o se usan) con los conceptos matemáticos correspondientes, que se den cuenta

de las limitaciones de los materiales y que elaboren mentalmente imágenes, representaciones y símbolos matemáticos relacionados.[11]

- Tratar de evitar que el alumnado dependa de los manipulativos para hacer una determinada tarea. Los manipulativos deben permitir al alumnado entender las matemáticas, porque demuestran las relaciones subyacentes generales, y no únicamente «conducirlos al resultado correcto» de un problema específico.[12]
- Los manipulativos deben hacer la función de «andamiaje» y, por tanto, pueden suprimirse cuando ya se ha alcanzado un cierto grado de autonomía. Antes de utilizar un manipulativo, es importante sopesar si el alumnado podrá acabar trabajando las matemáticas sin él. Cuando se retiran los manipulativos, al alumnado les puede servir hacer diagramas o imaginarse que trabajan con los manipulativos.
- Los manipulativos pueden utilizarse con el alumnado de todas las edades. La decisión de suprimir un manipulativo se justifica por la mejora de los conocimientos y la comprensión del alumnado, no por su edad.

Cuadro 2: Ejemplo del uso de materiales manipulativos

Una profesora dijo: «Decidme un número de dos cifras que termine en 0». Una alumna respondió: «Cuarenta». La profesora añadió: «A este número, voy a restarle el número de las decenas: 40 – 4 da 36».

El alumnado hizo lo mismo con otros números de dos cifras terminados en 0 y descubrió que el resultado siempre era un múltiplo de 9.

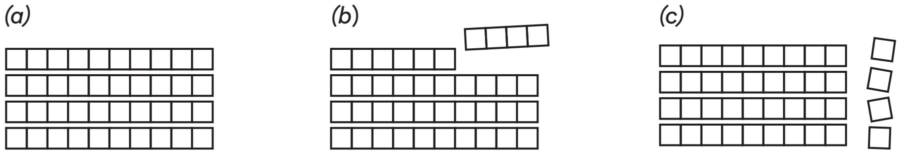
La profesora dijo: «Ahora voy a probar si con los policubos podemos ver por qué siempre obtenemos un múltiplo de 9».

La profesora formó cuatro tiras de 10 cubos cada una. «Aquí hay 40. ¿Qué pasa si quitamos 4 cubos?». *(a)*

Un alumno se acercó a la mesa y quitó 4 cubos. *(b)* «¿De qué otro modo se podría hacer?», preguntó la profesora.

Otro alumno quitó 4 cubos de un modo distinto. *(c)*

(a) *(b)* *(c)*



Una alumna dijo: «¡Ah, vale! Si quitamos uno de cada 10, nos quedan cuatro de 9». Y un alumno dijo: «Y si empezamos con 70, tenemos 10 sietes; y si quitamos 1 siete, nos quedan 9 sietes».

La profesora escribió:

$$40 - 4 = 10 \times 4 - 1 \times 4 = 9 \times 4$$

$$70 - 7 = 10 \times 7 - 1 \times 7 = 9 \times 7$$

Y el alumnado lo comentó. A continuación, la profesora presentó, como conclusión, la formulación siguiente:

$$10t - t = (10 - 1)t = 9t$$

Otros tipos de *representaciones*

Las evidencias muestran que las rectas numéricas son un sistema de representación especialmente eficaz en todos los cursos, de 1.º de primaria a 1.º de secundaria; y hay evidencias sólidas sobre la utilidad de los diagramas como estrategia de resolución de problemas. Aunque las evidencias específicas sobre el uso de las representaciones en general no son tan sólidas, es probable que lo expuesto anteriormente acerca de la eficacia de los manipulativos sea aplicable al resto de las representaciones.

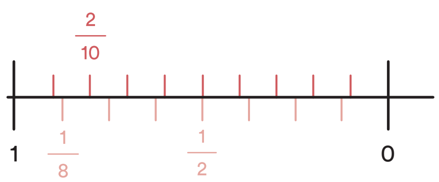
Cuadro 3: Utilizar una recta numérica

El profesor se dio cuenta de que algunos alumnos no hacían correctamente la suma de fracciones, porque sumaban tanto los numeradores como los denominadores; así que planteó esta cuestión:

«¿Es correcto?»

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{2}{20}$$

Algunos alumnos señalaron que $^2/_{10}$ es menor que $\frac{1}{2}$. Con ayuda del profesor, el alumnado representaron las tres fracciones mediante una recta numérica.



De este modo, vieron que $\frac{1}{2}$ equivale a $^4/_8$ y entendieron que el resultado es $^5/_8$. Luego, el alumnado se inventó ejemplos de sumas de fracciones correctas e incorrectas y utilizó rectas numéricas para entenderlas.

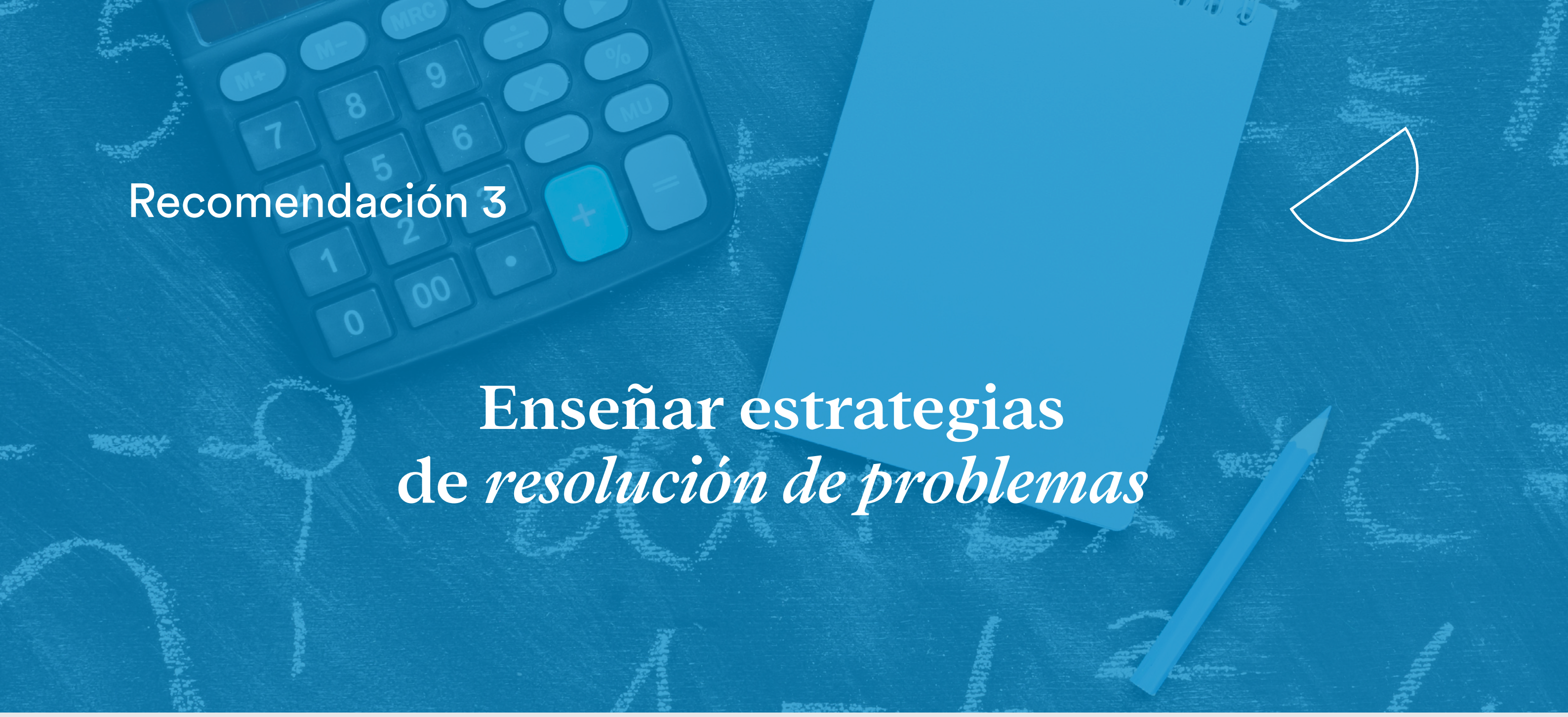
Aunque, en general, parece que utilizar varias representaciones tiene un efecto positivo en el rendimiento, se necesitan más investigaciones sobre las que los profesores puedan basarse para decidir qué representaciones y cuántas utilizar en cada momento.[13] Hay evidencias prometedoras que muestran que comparar diferentes representaciones y debatir sobre ellas puede ayudar al alumnado a desarrollar la comprensión conceptual. Los profesores deben elegir, con un criterio determinado, diferentes representaciones de cuestiones matemáticas fundamentales para compararlas y comentarlas, con el objetivo de favorecer que el alumnado desarrolle representaciones más abstractas y gráficas. Sin embargo, aunque utilizar varias representaciones pueda favorecer la comprensión, los profesores deben tener presente que utilizar demasiadas al mismo tiempo puede confundir al alumnado y dificultar el aprendizaje.[14]

Resumen de las evidencias

- Al revisar la literatura, se encontraron cinco metanálisis relevantes sobre el uso de determinados manipulativos y representaciones. Las evidencias más sólidas respaldan el uso de los manipulativos.
- Dos estudios de revisión sistemáticos llevados a cabo por la What Works Clearinghouse, del Departamento de Educación de Estados Unidos, aportan evidencias favorables al uso de las representaciones visuales, en particular para la resolución de problemas y como ayuda para el alumnado a quien le cuesta las matemáticas.

Recomendación 3

Enseñar estrategias de *resolución de problemas*



Recomendación 3

Enseñar estrategias de *resolución de problemas*

Generalmente, la resolución de problemas se enmarca en situaciones en que el alumnado carece de un método directo para solucionar un problema concreto. Por ello, tienen que abordarlo con flexibilidad y encontrar una solución por sí mismos. Para lograrlo, el alumnado debe recurrir a diversas estrategias de resolución de problemas (véase el Cuadro 4) para entender situaciones desconocidas y enfrentarse a ellas con inteligencia.

Las evidencias señalan que los profesores deben tener en cuenta los aspectos siguientes:[15]

- Elegir tareas de resolución de problemas que el alumnado no pueda resolver mediante ningún método directo que conozcan. A veces, la resolución de problemas se entiende como los problemas rutinarios contextualizados o «problemas con texto», pensados para ilustrar el uso de un método específico. Pero si lo que se pide al alumnado es que únicamente apliquen un determinado procedimiento o algoritmo para llegar a la solución, no es resolución de problemas, sino práctica del procedimiento.
- Considerar la posibilidad de presentar, por una parte, los problemas con estructuras similares y contextos diferentes, y, por otra, los problemas con el mismo contexto pero estructuras diferentes. El alumnado tiene que experimentar la identificación de estructuras matemáticas similares en situaciones diferentes, así como identificar y cuestionarse diversas relaciones entre variables en una misma situación.
- Enseñar al alumnado a utilizar y comparar diferentes enfoques. Hay muchas maneras de abordar un problema. Se puede aprender mucho analizando diferentes soluciones de un mismo problema y buscando semejanzas en soluciones a diferentes problemas. El alumnado tendrá que diferenciar entre la semejanza superficial (p. ej., dos problemas sobre zanahorias) y las semejanzas más esenciales, relacionadas con la estructura matemática, que hacen que estrategias similares sean eficaces (p. ej., dos problemas en diferentes contextos, pero ambos sobre ampliación). Se debe enseñar al alumnado a cuestionarse y utilizar sus conocimientos matemáticos para resolver problemas. También hay que motivarlos a que busquen, en sus conocimientos sobre problemas similares, estrategias que les hayan permitido resolverlos, así como operaciones y conceptos matemáticos que puedan ser relevantes.
- Promover el uso de las representaciones visuales. Hay que ayudar al alumnado a utilizar diagramas y representaciones que aporten información sobre la estructura de un problema y su formulación matemática.
- Utilizar ejemplos resueltos para que el alumnado pueda analizar las diferentes estrategias aplicadas. Al incluir estos ejemplos en el enunciado del problema y una solución correcta, no es necesario realizar los procedimientos correspondientes para llegar a la solución y, con ello, el alumnado puede centrarse en el razonamiento y las estrategias.

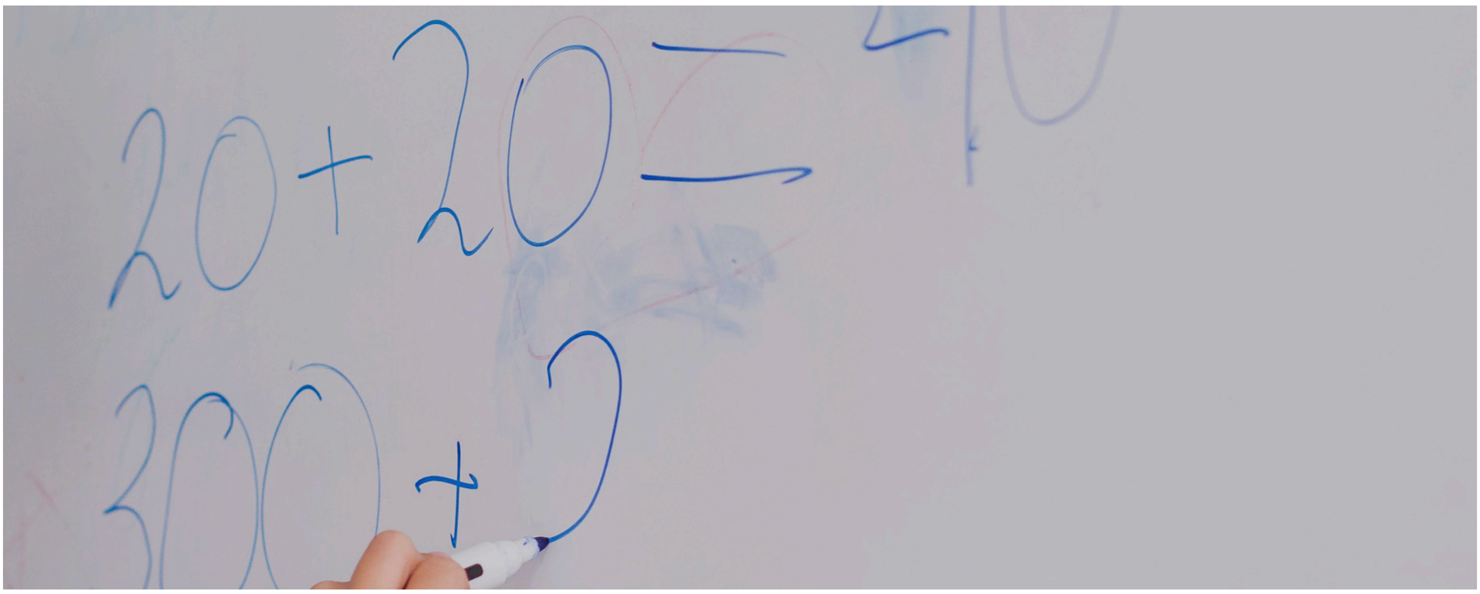
Los ejemplos resueltos pueden estar completos o incompletos; o ser incorrectos, que se hayan incluido errores conceptuales o de otro tipo muy comunes con el objetivo de que el alumnado los detecte. Analizar y comentar los ejemplos resueltos ayuda al alumnado a desarrollar una comprensión más profunda de los procesos lógicos seguidos para resolver problemas.

- Pedir al alumnado que analice cómo resuelve los problemas, que reflexione al respecto y exponga su razonamiento y la estrategia elegida. Cuando se trabaja en un problema, motivar al alumnado a que se hagan preguntas como las siguientes: «¿Qué trato de resolver?», «¿Cómo lo voy a hacer?», «¿Funciona mi planteamiento?» y «¿De qué otro modo podría plantearlo?». Una vez resuelto el problema, pedir al alumnado que se haga preguntas como las siguientes: «¿Qué ha servido para resolver el problema?», «¿Qué no ha servido?», «¿Qué otros problemas se podrían resolver con un planteamiento similar?, «¿Qué problemas parecidos a este había resuelto antes?». El alumnado debe expresar sus pensamientos de forma oral y por escrito —mediante representaciones, expresiones y ecuaciones—, tanto a los profesores como al resto del alumnado.

Cuadro 4: ¿Qué es una estrategia de resolución de problemas?

Una estrategia de resolución de problemas es un planteamiento general dirigido a resolver un problema. Se puede utilizar una misma estrategia general para resolver muchos problemas diferentes. Por ejemplo, una estrategia útil es identificar un problema más sencillo que esté relacionado con el original. El hecho de comentar la solución al problema más sencillo puede dar una idea de cómo abordar el problema original, que es más difícil, y de cuál es la estructura matemática subyacente.

Una estrategia es diferente de un algoritmo, que es una secuencia definida de pasos predeterminados que se ejecutan en un orden concreto para llevar a cabo un procedimiento frecuentemente necesario.

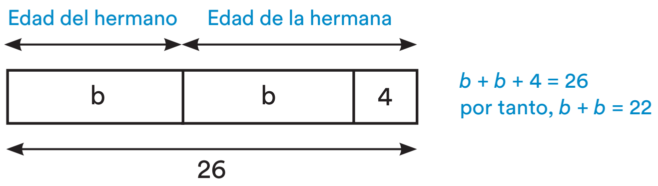


Cuadro 5: Ejemplo del uso del modelo de barras para comparar estrategias

Una clase debía resolver este problema:

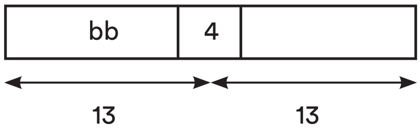
«La hermana tiene 4 años más que el hermano. Entre los dos tienen 26 años. ¿Qué edad tiene cada uno?».

Un alumno utilizó el modelo de barras para resolver el problema: «El hermano tiene 11 años y la hermana tiene 15 años».



Otro alumno dijo: «¿No podríamos dividir 26 por la mitad y luego sumar y restar 4? Así, sus edades serían 13 + 4 y 13 – 4, o sea, 17 y 9».

A lo que una alumna respondió: «No, no hay que sumar y restar 4, hay que sumar y restar 2». La profesora dibujó el modelo de barras correspondiente: «¿Nos sirve para saber si es 4 o 2 lo que hay que sumar y restar?».



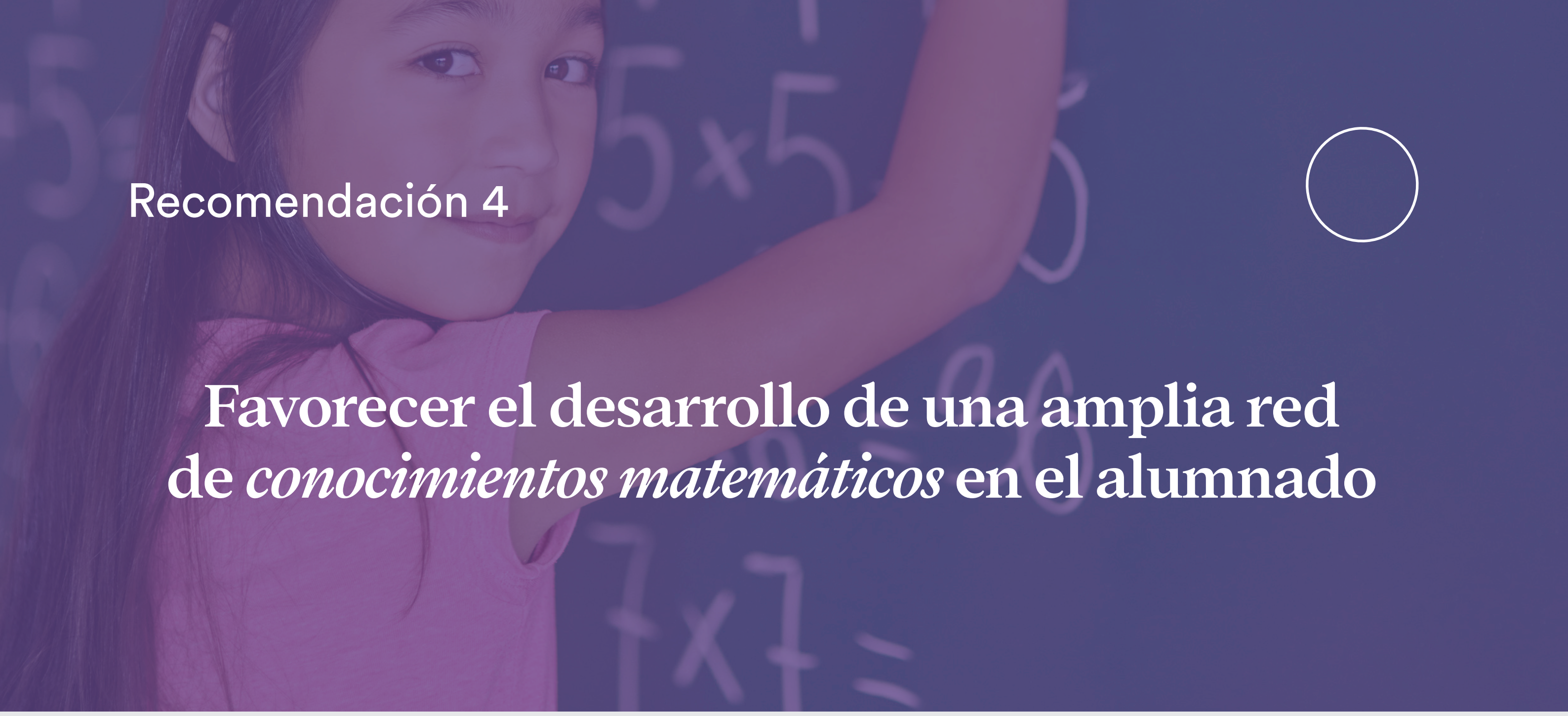
Otra alumna dijo: «El 26 tiene dos partes *b* y una parte 4; por tanto, lo correcto es sumar y restar 2, no 4».

Resumen de las evidencias

- Al revisar la literatura, se encontraron tres metanálisis relevantes sobre la enseñanza de la resolución de problemas; proporcionan cierta evidencia del uso de la resolución de problemas, aunque los efectos referidos son distintos.
- Un estudio de revisión sistemático, llevado a cabo por la What Works Clearinghouse, del Departamento de Educación de Estados Unidos, aporta evidencias de determinados enfoques educativos. Se considera que las evidencias más sólidas respaldan el uso de representaciones visuales y ejemplos resueltos, así como que los profesores motiven al alumnado para que analice el proceso de resolución de problemas y reflexione sobre él.

Recomendación 4

Favorecer el desarrollo de una amplia red de *conocimientos matemáticos* en el alumnado



Recomendación 4

Favorecer el desarrollo de una amplia red de *conocimientos matemáticos* en el alumnado

Esta recomendación presenta las evidencias relacionadas con la enseñanza de temas específicos de matemáticas. Aunque se refiere a temas concretos, los profesores deben destacar las numerosas conexiones entre las operaciones, los procedimientos y los conceptos matemáticos a fin de crear una red amplia.

A día de hoy, la evidencia sobre enfoques educativos eficaces es más sólida respecto a la aritmética (incluidas las fracciones, la razón y la proporción) y el álgebra que con otras áreas, como la geometría. Sin embargo, es probable que algunos de los enfoques que se presentan a continuación (en especial, elegir estrategias, prestar atención a la estructura matemática y partir de lo que el alumnado entiende) puedan aplicarse en todos los temas de matemáticas. Los profesores tienen que adoptar dichos enfoques y, al mismo tiempo, servirse de sus conocimientos de matemáticas, su experiencia profesional y el resto de las recomendaciones de esta guía.

Asegurarse de que el alumnado *recuerda con fluidez* las operaciones matemáticas sencillas

Recordar rápidamente operaciones matemáticas sencillas es fundamental para el rendimiento del alumnado en matemáticas.[16] Probablemente, al alumnado al que le cuesta recordar las sumas, restas, multiplicaciones y divisiones, incluso con números conectados (*number bonds*) y los múltiplos, le resultará más difícil entender y utilizar los conceptos matemáticos esenciales en cursos posteriores.

Enseñar al alumnado a entender los *procedimientos*

El alumnado puede realizar los procedimientos más rápidamente cuando entiende cómo funcionan y en qué circunstancias son útiles.[17] Recordar con fluidez un procedimiento es importante, pero los profesores tienen que asegurarse de que se dedica el tiempo adecuado a entenderlo.

Hay que fomentar la comprensión de los procedimientos por parte del alumnado, porque, entre otras razones, si no los recuerda, podrá reconstruir los pasos que los forman.[18] Para este fin, son útiles las recomendaciones de esta guía sobre las representaciones visuales, los conceptos erróneos y el planteamiento de problemas en contextos reales.

Enseñar al alumnado a elegir entre las distintas *estrategias matemáticas*

Los profesores tienen que ayudar al alumnado a comparar métodos y estrategias de resolución de problemas de álgebra, aritmética, etc., y a elegir el más adecuado. Hay que enseñarles distintos métodos: cálculo mental, con calculadora y con papel y lápiz; así como animarlos a que decidan cuándo es adecuado y eficaz cada uno de ellos.

Las evidencias muestran que utilizar la calculadora no suele afectar negativamente a la habilidad del alumnado para calcular mentalmente o con papel y lápiz. De hecho, algunos estudios han demostrado que utilizar calculadora puede tener un efecto positivo no solo en las habilidades de cálculo mental, sino también en la resolución de problemas y en las actitudes hacia las matemáticas.[19] Por ello, las calculadoras deben formar parte de la enseñanza, al igual que el cálculo mental y otros enfoques, y hay que enseñar al alumnado a decidir cuándo, dónde y por qué utilizar determinados métodos. El objetivo es que el alumnado pueda autorregular el uso que hace de la calculadora y, en consecuencia, la utilice menos (pero mejor).[20]

Partir de lo que el alumnado entiende sobre el *pensamiento multiplicativo* para introducir procedimientos

El pensamiento multiplicativo es la capacidad de entender la multiplicación y la división y pensar sobre estos conceptos. Es una habilidad importante porque es necesaria para las tareas que impliquen razones, tasas y proporciones, y también en contextos reales, como en los problemas para calcular la mejor oferta. Por ejemplo, un concepto erróneo común —cuando hay que calcular las cantidades necesarias para 10 personas a partir de una receta para 4— lleva a muchos alumnos a sumar 6 (porque la diferencia en el número de personas es 6), en vez de multiplicar por 2,5 las cantidades, o duplicarlas y sumar la mitad (porque la razón es 4:10, 2:5 o 1:2).

Algunas evidencias apuntan a que retrasar la enseñanza de los métodos formales para centrarse en desarrollar el pensamiento multiplicativo del alumnado es beneficioso.[21] Los profesores deben tener presente la posibilidad de utilizar contextos y tareas a partir de los cuales ir ampliando la comprensión informal del alumnado. Tras introducir los procedimientos y algoritmos formales, el profesorado debe volver a las estrategias informales iniciales del alumnado y mostrarles cuándo conducen a los mismos resultados, y cuándo y por qué pueden ser menos eficaces.

Enseñar al alumnado que las *fracciones* y los *decimales* amplían el sistema numérico más allá de los números enteros

Las fracciones a menudo se explican, en un inicio, partiendo de la idea de que representan partes de un todo; por ejemplo, una mitad es una parte de un todo que tiene dos partes iguales. Este concepto es importante, pero no es fácilmente trasladable a las fracciones mixtas mayores que 1. A menudo se pasa por alto otro concepto importante: las fracciones son números que pueden representarse en una recta numérica. Las fracciones tienen magnitudes o valores, y pueden utilizarse para referirse a números situados entre los números enteros.[22]

Entender que las fracciones son números, y ser capaces de estimar su posición en una recta numérica, puede servir al alumnado para estimar el resultado de la suma de dos fracciones y, así, reconocer y abordar conceptos erróneos, como el error habitual de sumar fracciones sumando los numeradores por una parte y los denominadores por otra.

Las rectas numéricas son una herramienta útil para enseñar estos conceptos. Pueden utilizarse para:

- Representar la magnitud, o el valor, de fracciones, números decimales y números racionales en general.
- Comparar las magnitudes de fracciones, números decimales y números enteros.

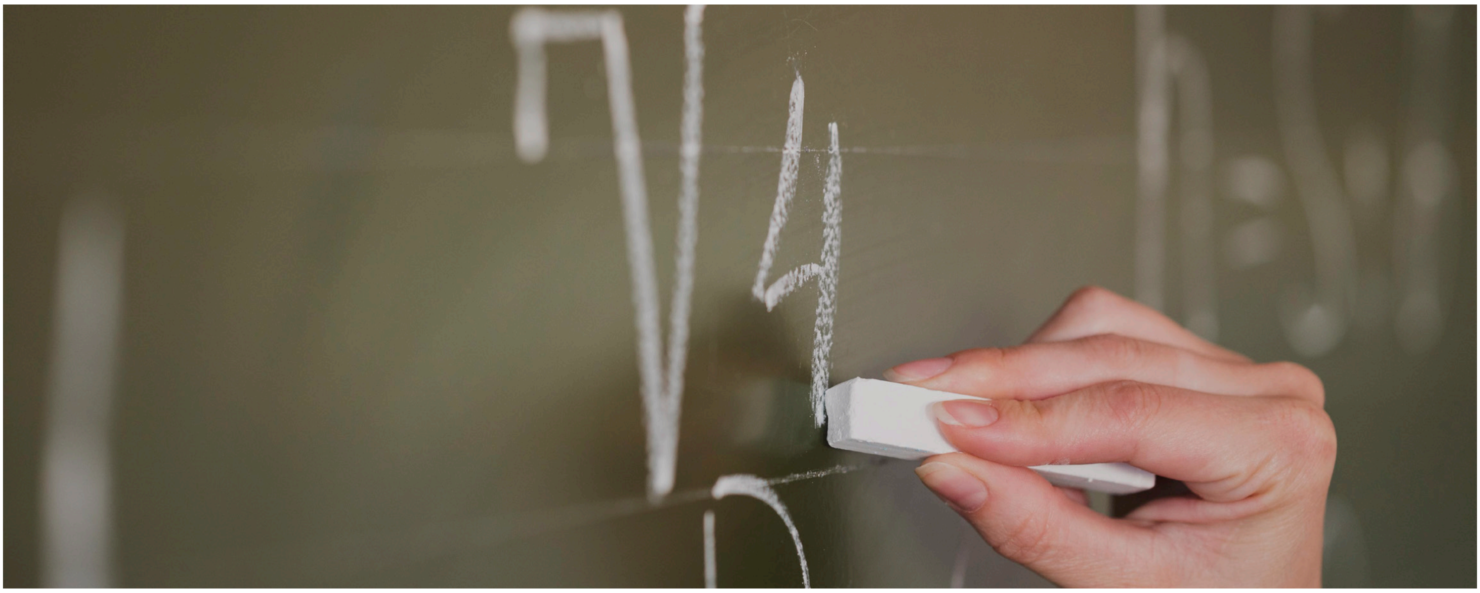
Enseñar al alumnado a *reconocer* y *utilizar* las estructuras matemáticas

Prestar atención a la estructura matemática subyacente ayuda al alumnado a establecer conexiones entre problemas, estrategias de resolución y representaciones que a simple vista pueden parecer distintos pero que son matemáticamente equivalentes. Los profesores tienen que fomentar que el alumnado utilice un lenguaje que refleje la estructura matemática; por ejemplo, ante respuestas que contengan términos poco precisos y no matemáticos, reformulándolas con los términos matemáticos correspondientes. A continuación, se dan ejemplos de cómo los profesores pueden ayudar al alumnado a reconocer la estructura matemática:

- Motivar al alumnado para que lea las expresiones aritméticas y algebraicas como descripciones de relaciones, en lugar de como una indicación de lo que hay que calcular[23] (p. ej., a menudo el alumnado interpreta el signo igual como una indicación de que deben hacer un cálculo, y no como una indicación de una equivalencia;[24] entender una relación como una equivalencia comportaría pensar en «17 × 25 = 10 × 25 + 7 × 25» como «17 × 25 es lo mismo que 10 × 25 + 7 × 25»).
- Hacer que el alumnado pueda entender las relaciones inversas entre la suma y la resta, y entre la multiplicación y la división.[25]

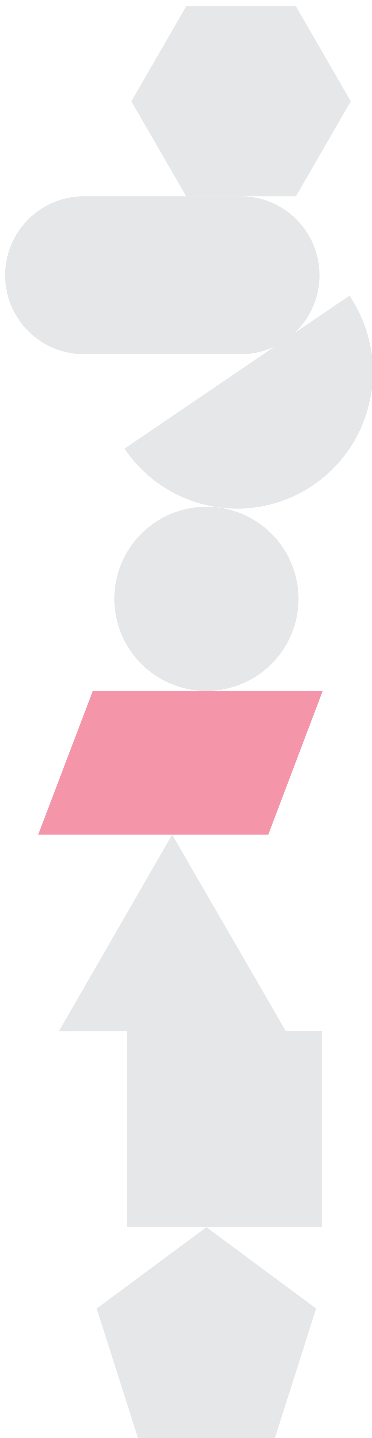
Resumen de las evidencias

- Al revisar la literatura, se encontraron dos metanálisis relevantes sobre la enseñanza del álgebra, pero se trata de estudios generales que no aportan evidencias sobre enfoques educativos concretos.
- Cuatro estudios de revisión sistemáticos llevados a cabo por la What Works Clearinghouse, del Departamento de Educación de Estados Unidos, proporcionan evidencias de determinados enfoques aplicados a la enseñanza de aritmética y álgebra. Se considera que las evidencias más sólidas recomiendan centrarse en el recuerdo fluido, fomentar la elección consciente de estrategias y utilizar rectas numéricas para representar fracciones y decimales.



Recomendación 5

Fomentar la *autonomía* y la *motivación* en el alumnado



Recomendación 5

Fomentar la *autonomía* y la *motivación* en el alumnado

Los profesores deben promover que el alumnado se responsabilice de su aprendizaje y se implique activamente en él.[26] Para ello es necesario que el alumnado desarrolle la metacognición (la capacidad de planificar, analizar y evaluar el pensamiento y el aprendizaje propios y la motivación por aprender matemáticas.

Fomentar la metacognición en el alumnado mediante la *reflexión estructurada* sobre su aprendizaje

Fomentar el desarrollo de la metacognición en el alumnado puede ayudarlos a ser matemáticos más eficaces e independientes. Se suele considerar la metacognición como la capacidad del alumnado para reflexionar sobre su propio pensamiento y aprendizaje.

Algunos ejemplos de metacognición por parte del alumnado son los siguientes:

- Examinar sus conocimientos a fin de tenerlos en cuenta al elegir un determinado enfoque para resolver una tarea matemática.
- Analizar si el enfoque elegido ha funcionado.
- Cambiar de enfoque o continuar con el mismo en función de las evidencias obtenidas al analizarlo.

En último término, el objetivo es que el alumnado sea capaz de hacerlo de forma automática y autónoma, sin la ayuda del profesor o de sus compañeros; sin embargo, son habilidades complejas y al principio hay que enseñarlas y fomentarlas. Los profesores deben ejemplificar la metacognición (véase el ejemplo del Cuadro 6) describiendo su propio pensamiento o formulando preguntas a sus alumnos mientras hacen una tarea.[27] Asimismo, pueden utilizar ejemplos resueltos para explicitar su pensamiento.[28] Las expectativas de los profesores sobre la autonomía del alumnado debe ir aumentando conforme estos van adquiriendo competencia y fluidez. Para que el alumnado desarrolle la metacognición autónoma, los profesores pueden crear situaciones favorables, principalmente de dos modos:

- Fomentando la autoexplicación; es decir, el alumnado se explica a sí mismo cómo ha planificado, analizado y evaluado la realización de una tarea.
- Motivando al alumnado para que explique su pensamiento metacognitivo al profesor y a sus compañeros.[29]

Cuadro 6: Ejemplificar la metacognición al resolver un problema

Un profesor, mientras demuestra la resolución de un problema, podría ejemplificar cómo planifica, analiza y evalúa su pensamiento reflexionando en voz alta sobre cuestiones como las siguientes:

- ¿Qué nos pide el problema?
- ¿He visto alguna vez un problema matemático como este? ¿Qué planteamientos he probado para resolverlo y cuáles han funcionado?
- ¿Puedo representar el problema mediante un diagrama o una gráfica?
- ¿Tiene sentido mi resultado después de haber vuelto a leer el problema?
- ¿Necesito ayuda o más información para resolver el problema? ¿Dónde la encuentro?

Fomentar la metacognición no es sencillo y hay diversos aspectos importantes que deben tenerse en cuenta:

- Los profesores deben asegurarse que el trabajo de la metacognición no hace que el alumnado se distraiga de la tarea matemática en sí misma.[30] Esto podría suceder si se espera demasiado del alumnado, como que haga mucho y muy pronto, sin un andamiaje eficaz por parte del profesor.
- Independientemente de la estrategia que se enseñe, el alumnado necesita un tiempo considerable para imitar, interiorizar y aplicar las estrategias de forma autónoma, después de haberlas trabajado varias veces en muchas clases de matemáticas.[31] Es probable que el tiempo necesario para que el alumnado desarrolle la metacognición sea superior al de otras habilidades y conocimientos.
- El debate y el diálogo pueden ser útiles para que el alumnado desarrolle la metacognición, pero también hay que enseñarles a comentar y debatir.[32] Los profesores deben enseñar cómo es un debate eficaz y cómo deben actuar los oyentes.[33] Hay que disponer de una habilidad especial para organizar debates productivos, y ello puede requerir una capacitación profesional específica.

Fomentar la *motivación del alumnado* a largo plazo para aprender y practicar las matemáticas

Promover actitudes positivas en el alumnado y motivarlos es, sin duda, un objetivo importante en la enseñanza. Además, puede favorecer el desarrollo de la autorregulación y la metacognición, dado que son capacidades que requieren un esfuerzo consciente y sostenido, y, para ello, se necesita motivación durante un largo periodo de tiempo. La motivación es compleja, y hay factores que pueden influir en ella: si al alumno le gustan o no las matemáticas, si cree que es bueno o malo en matemáticas, si piensa que las matemáticas son útiles o no...[34] Desgraciadamente, muchos alumnos tienen una actitud negativa hacia las matemáticas que tiende a empeorar conforme crecen. Según una encuesta reciente realizada en Inglaterra, el porcentaje de alumnos a los que no les gustaba aprender matemáticas era del 17 % en cuarto de primaria y del 48 % en segundo de secundaria.[35]

Aunque las actitudes positivas son importantes, faltan evidencias sobre métodos eficaces para promoverlas.

Para más información sobre la metacognición, se puede consultar la guía *Metacognición y aprendizaje autorregulado*. Pincha aquí o escanea el QR.

Podría ser relevante que la actitud general del centro educativo hacia las matemáticas sea positiva. El equipo directivo debe velar por que todo el personal, incluido el equipo no docente, muestre su motivación, confíe en sus habilidades matemáticas, disfrute con las matemáticas y lo transmita al alumnado.

El profesorado debe buscar la colaboración de las familias para que animen a sus hijos a valorar las matemáticas y a confiar en sus habilidades matemáticas.[36] Sin embargo, deben ir con cuidado al implicar directamente a las familias en el aprendizaje de las matemáticas de sus hijos —p. ej., ayudándolos a hacer los deberes—, porque este tipo de intervenciones no suelen corresponderse con un mayor rendimiento escolar.[37]

Cuadro 7: La ansiedad matemática

La ansiedad matemática es un tipo de ansiedad que se refiere específicamente a las matemáticas, y no es como la ansiedad general. Puede ser muy perjudicial para el aprendizaje del alumnado porque sobrecarga la memoria de trabajo o lleva a los niños a evitar las matemáticas. La ansiedad matemática suele incrementarse con la edad, pero se puede observar en niños de 5-6 años.[38] Lamentablemente, aun con algunos estudios prometedores, se sabe poco sobre cómo mitigarla.[39] Tomar conciencia del problema y ser capaz de reconocerlo es el primer paso.

Los profesores deben prestar atención a los alumnos que evitan las matemáticas o muestran síntomas de ansiedad (bloqueo, sudoración, inquietud) respecto a esta materia, y han de ayudarlos a superarlo sirviéndose de su conocimiento del alumnado y su criterio profesional.

Diseñar aulas de matemáticas motivantes a partir de una pregunta clave. El caso del CEIP San Félix en Zarandona, Murcia

Mari Cruz Morcillo es PT y profesora de educación primaria en el CEIP San Félix y hace un año decidió crear clases de matemáticas más motivantes, inclusivas y competenciales. Para ello contó con el apoyo de Lidia Esparza, PT, profesora de educación primaria y miembro del Equipo DEA (Equipo de Orientación Educativa y Psicopedagógica Específico de Dificultades Específicas de Aprendizaje y TDA-H de la Región de Murcia) dependiente de la Consejería de Educación de Murcia. Desde este equipo acompañan y apoyan a docentes para que transformen sus aulas y las conviertan en espacios realmente inclusivos.

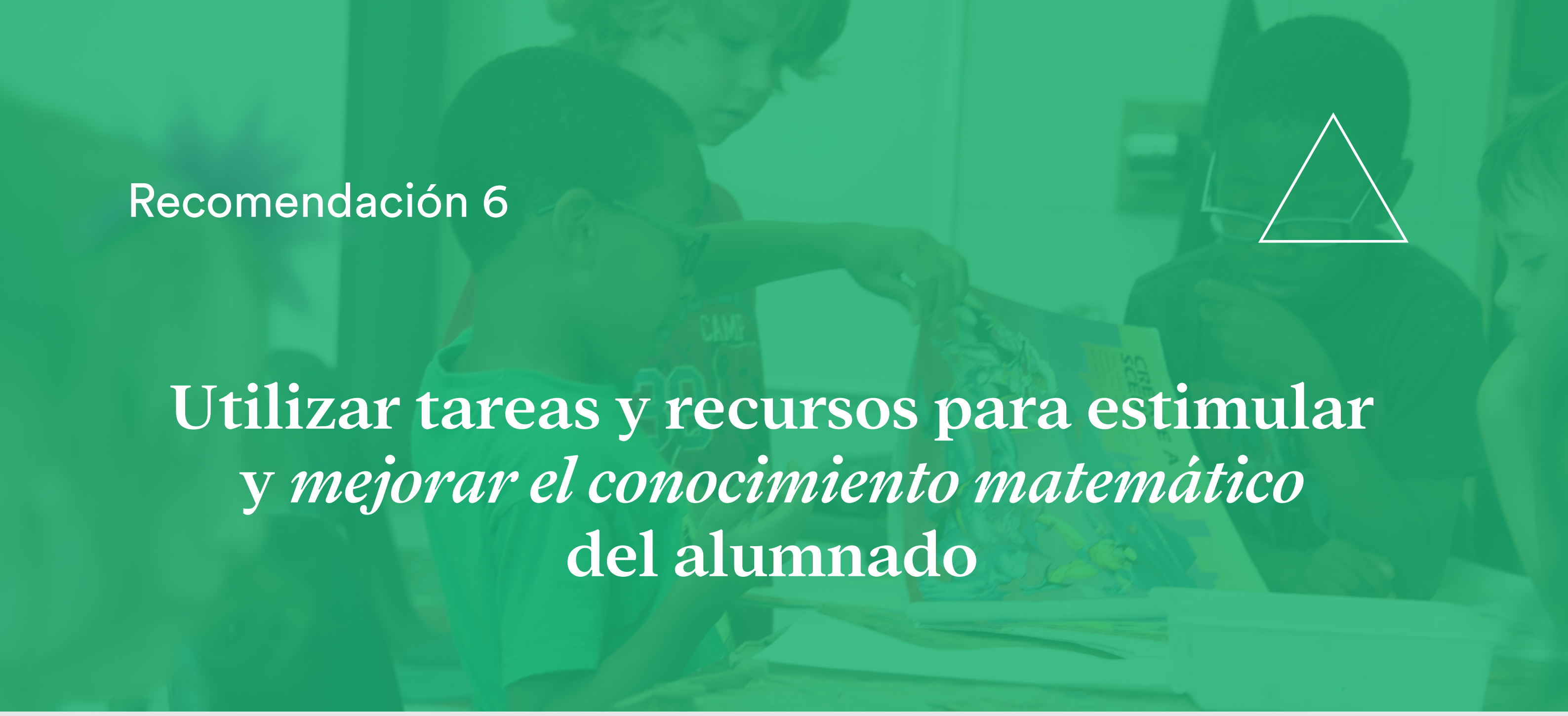
Con este objetivo en la cabeza, Mari Cruz y Lidia lo cambiaron «todo». Empezaron haciéndose una pregunta clave: «¿qué es lo que tiene que saber un alumno de primero de primaria?». Su sorpresa llegó cuando, al investigar el currículo con detenimiento, se dieron cuenta de que no eran «tantas» cosas como dice el imaginario colectivo y que en ningún lugar del currículo hablaba de que los estudiantes «tuvieran que hacer listas de sumas una tras otra, sino más bien aprender a sumar».

Estas reflexiones previas les ayudaron a hacer un cambio profundo en la forma en que enseñan matemáticas. Por un lado, decidieron dedicar más tiempo a los conceptos clave de las matemáticas del primer ciclo de primaria, para que el alumnado pudiera **profundizar** y **aprender descubriendo** por ellos mismos. Además, termporalizaron las clases teniendo en cuenta la **práctica en espiral** y la **práctica espaciada**: «es importante volver siempre a los conceptos, una y otra vez, para que el alumnado tenga oportunidades de trabajarlos en diferentes contextos y momentos». Y, por supuesto, el uso de lo **manipulativo** para trabajar primero los conceptos e ir llegando poco a poco a lo abstracto. Esto permite, por un lado, que el alumnado avance en la construcción de su propio conocimiento y no se bloquee al principio del proceso, como ellas veían que sucedía con el aprendizaje anterior más tradicional; y por otro, el profesorado puede ver y observar de forma clara qué proceso mental están siguiendo los estudiantes y detectar en qué punto se están «quedando».

Mari Cruz y Lidia tienen claro que en sus aulas no hay alumnado desmotivado porque esta forma de trabajar las matemáticas es una **celebración del error** y del **descubrimiento**. «No hace falta hacer nada especial, porque la propia forma de enseñar matemáticas es motivante».

Recomendación 6

Utilizar tareas y recursos para estimular y *mejorar el conocimiento matemático* del alumnado



Recomendación 6

Utilizar tareas y recursos para estimular y *mejorar el conocimiento matemático* del alumnado

Las tareas son fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas porque las que se realizan en el aula determinan, en gran medida, el funcionamiento de la clase. No obstante, las evidencias señalan que la elección de una tarea o un recurso no es tan importante como el modo en que los profesores van a usarlos en clase.[40] Las tareas y los recursos son herramientas que deben utilizarse con eficacia para que tengan un efecto positivo en el aprendizaje.

Utilizar eficazmente las tareas y los recursos requiere mucha pericia; y, para lograrlo, muchos profesores necesitarán una capacitación específica, que debería ser prioritaria para el equipo directivo como parte del desarrollo profesional continuo.

Resumen de las evidencias

- Al revisar la literatura, no se encontraron metanálisis sobre el uso de las tareas, a pesar de que hay mucha bibliografía sobre el uso y el diseño de tareas. En un estudio realizado a gran escala se indica que los conocimientos del profesor son esenciales para aprovechar todo el potencial de aprendizaje que tiene una tarea.
- Se encontraron dos metanálisis relevantes que analizaban la influencia de programaciones distintas de libros de texto. Estos estudios aportan evidencias moderadas que indican que dicha influencia es muy pequeña respecto a una programación u otra.
- Se identificaron once metanálisis sobre aspectos tecnológicos; sin embargo, aun con las numerosas revisiones, se obtuvieron pocas evidencias sobre tecnología.

Cuadro 8: Tener en cuenta las evaluaciones de los puntos fuertes y débiles del alumnado como criterio para elegir las tareas

Un profesor preguntó a sus estudiantes cuáles de las ecuaciones siguientes eran lineales y pasaban por el punto (1, 2):

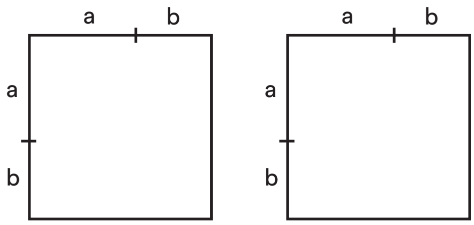
$x = 1$ $5x = 3 + y$ $x = y - 1$ $y = 2x^2$

Algunos estudiantes comprobaron si (1, 2) satisfacía las ecuaciones, pero no si las ecuaciones eran lineales. Otros descartaron todas las ecuaciones porque no estaban escritas en la forma $y = mx + c$. De este modo, el profesor pudo ver qué sabía y qué no sabía el alumnado sobre las gráficas de ecuaciones lineales.

Después de comentar las respuestas, y crear las gráficas mediante un programa informático, el profesor pidió al alumnado que dieran algunos ejemplos y contraejemplos de ecuaciones lineales que pasaran por el punto (2, –3). Entonces, el alumnado dio ejemplos correctos expresados de distintas formas, como $3x + 2y = 0$, y contraejemplos tanto de líneas que no pasaban por (2, –3) como de curvas.

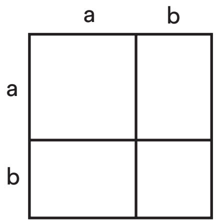
Cuadro 9: Utilizar las tareas como medio para abordar los conceptos erróneos

Una profesora se dio cuenta de que algunos alumnos entendían que $a^2 + b^2 = (a + b)^2$. Y dibujó dos diagramas idénticos en la pizarra.



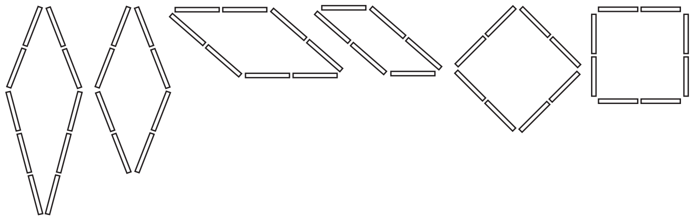
Entonces, pidió al alumnado que representara $a^2 + b^2$ en uno de los diagramas y $(a + b)^2$ en el otro.

Al dibujar dos líneas más, como se muestra en la imagen, el alumnado pudo ver que, en general, $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$.



Cuadro 10: Dar ejemplos y contraejemplos de conceptos

Una profesora pidió al alumnado que definiese «rombo», y escribió las definiciones en la pizarra. A continuación, dibujó una figura y les dijo que levantaran la mano si creían que era un rombo, y repitió el mismo procedimiento varias veces.



La profesora fue anotando el número de votos del alumnado debajo de cada figura. Después, les dijo que la primera figura no era un rombo, pero que la segunda sí lo era. Y les pidió que votaran de nuevo para el resto de las figuras, y volvió a anotar el número de votos. Seguidamente, les dijo si la tercera y la cuarta figuras eran rombos o no lo eran, y repitió la votación y el registro de votos para las dos últimas figuras. Tras decirles si estas eran rombos o no, les pidió de nuevo que definieran rombo, y el alumnadolos alumnos comentaron las respuestas dadas. En este caso, se seleccionaron ejemplos y contraejemplos específicos, teniendo en cuenta tanto la forma como la orientación, para poner de relieve los conceptos erróneos más comunes, como que un cuadrado no es un rombo.

Utilizar las tareas *eficazmente*

¿Cómo usar las tareas de forma eficaz? En los cuadros siguientes se ejemplifican aspectos clave del uso de tareas. En muchas fuentes se pueden encontrar tareas muy útiles, que se pueden preparar y adaptar en función de los objetivos previstos. Son muchas las tareas que, bien utilizadas por profesores cualificados, pueden favorecer el aprendizaje del alumnado, incluso las aparentemente rutinarias.

Cuadro 11: Comentar y comparar diferentes maneras de llegar a la solución

Una profesora pidió a la clase que propusieran distintas opciones para calcular 5 × 18. Estas fueron algunas de sus respuestas:

- «Puedo multiplicar 5 por 20 y, luego, restar dos veces 5».
  $5 \times 18 = 5 \times 20 - 5 \times 2 = 100 - 10 = 90$
- «Para multiplicar por 5, es fácil. Primero, multiplico por 10 y, luego, divido el resultado por la mitad».
  $10 \times 18 = 180$, $180 \div 2 = 90$
- «18 es nueve veces 2; así que puedo multiplicar 5 por 9 y, después, multiplicar el resultado por 2».
  $5 \times 9 = 45$, $45 \times 2 = 90$

La clase estuvo comentando en qué se parecían las opciones planteadas, qué método era más fácil de entender y de aplicar mediante cálculo mental. Entonces, la profesora les pidió que encontraran opciones similares para calcular 12 × 15.

Cuadro 12: Hacer tareas en las que se desarrolle el conocimiento conceptual y el procedimental

Un profesor pidió a la clase que calcularan el resultado haciendo una multiplicación larga.

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times\ 52 \\ \hline \end{array}$$

Después, les pidió que cambiaran las cifras de posición para formar otra multiplicación de dos cifras por dos cifras, por ejemplo, 53 × 24; y que encontraran la combinación de cifras que daba el resultado más alto.

Con esta tarea, el alumnado practicó el algoritmo de la multiplicación larga (conocimiento procedimental) y, al mismo tiempo, desarrolló la comprensión conceptual del valor posicional.

Cuadro 13: Plantear situaciones y problemas que sirvan para que el alumnado entienda las matemáticas

Un profesor expuso a la clase esta cuestión: «1.127 dividido por 23 es igual a 49. ¿Qué número dividido por 24 es igual a 49?».

Algunos alumnos, pensando que 24 es 1 más que 23, respondieron «1.128». Otros recurrieron al ensayo y error. Otros calcularon 24 × 49, que da el resultado correcto, pero ninguno entendió por qué.

Para que el alumnado pudiera entender mejor la estructura de la tarea, el profesor planteó la situación siguiente en voz alta y, a continuación, preguntó: «¿Nos puede servir esta situación para encontrar más fácilmente la solución a la pregunta?».

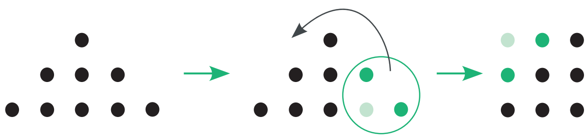
«Una clase de 23 alumnos reúne 1.127 € para su viaje de final de curso. Reparten el dinero a partes iguales y ven que a cada uno le corresponden 49 €».

El alumnado se dio cuenta de que debían plantearse la cuestión así: «¿Cuánto dinero tiene que reunir una clase de 24 alumnos para que le correspondan 49 € a cada uno?».

Con este contexto, les fue más fácil ver que hacían falta otros 49 € para el 24.º alumno y que, por tanto, la respuesta debía ser 1.127 + 49 = 1.176. Aquí el contexto sirvió para aclarar la estructura matemática.

Cuadro 14: Favorecer que el alumnado investigue la estructura matemática y haga generalizaciones

Un profesor demostró, con el diagrama siguiente, cómo transformar un triángulo de puntos con una base de 5 puntos en un cuadrado de 3 × 3 puntos moviendo únicamente 3 puntos.



Después, les preguntó cómo calcularían (no contarían) cuántos puntos hay en un triángulo de puntos con una base de 21 puntos.

Algunos alumnos simplemente contaron todos los puntos. Otros pensaron que el triángulo se podía convertir en un cuadrado de 19 × 19 (porque 3 = 5 – 2 y 19 = 21 – 2). Otros se dieron cuenta de que los puntos se podían redistribuir en un cuadrado de 11 × 11; o, de manera más general, un cuadrado de (n + 1) × (n + 1) para una base de 2n + 1 puntos.

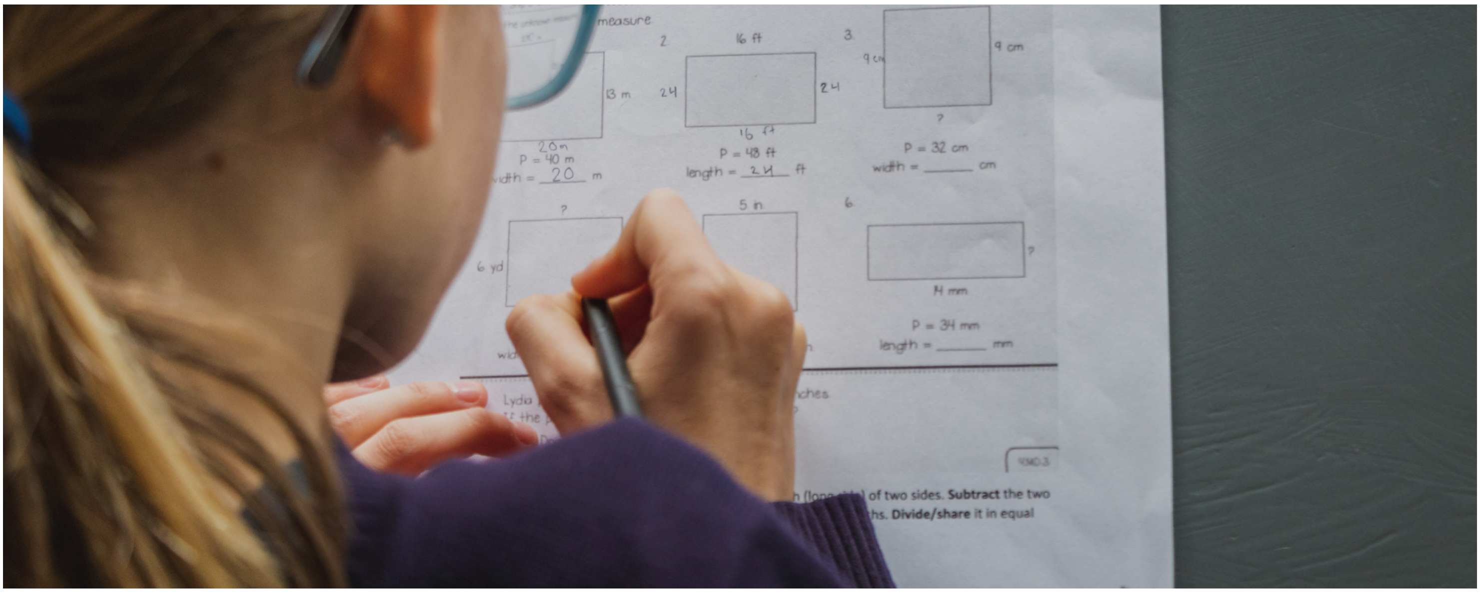
El profesor, mediante estos triángulos de puntos, facilitó que el alumnado viese que la suma de números impares es un número cuadrado.

Utilizar los *recursos* eficazmente

Es poco probable que, por el mero hecho de introducir un recurso, sea un libro de texto o una nueva tecnología, ese recurso (por sí solo) produzca un efecto positivo en la enseñanza o el aprendizaje. Los recursos, que deberían enmarcarse en una mejora de la calidad educativa, tienen que promover dicha mejora para lograr un cambio significativo.

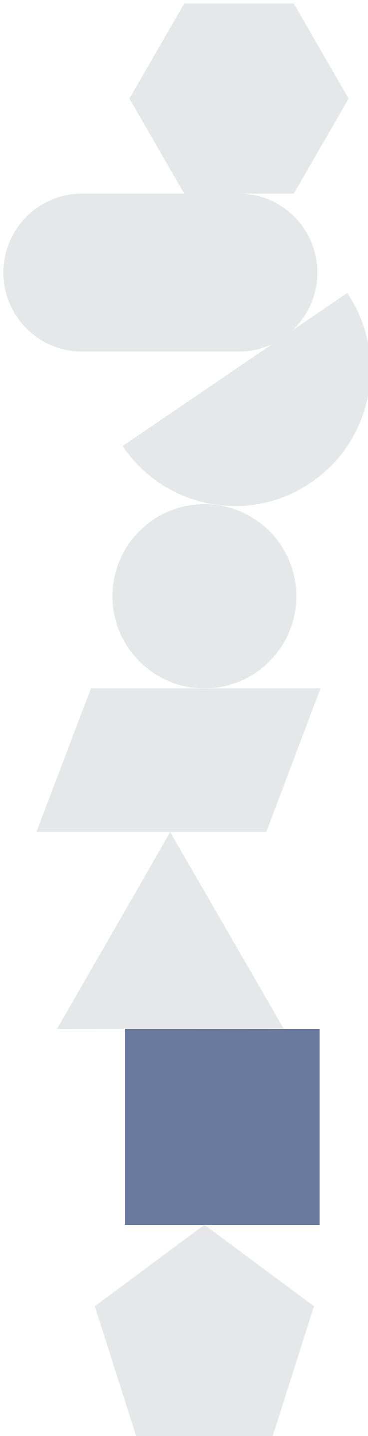
La tecnología es un recurso que parece muy prometedor para la enseñanza de las matemáticas, pero su efecto real en las aulas no siempre ha estado a la altura de las expectativas. En las clases de matemáticas se utiliza *software* y *hardware* tecnológico de muchos tipos, como dispositivos móviles, programas de geometría dinámica, entornos digitales de aprendizaje y juegos educativos. Independientemente del tipo de tecnología, las evidencias apuntan a una serie de principios básicos para que sea eficaz. Al respecto, se pueden consultar estudios detallados de revisión de la literatura titulados *Digital technology* en la web de la EEF. Cabe destacar tres aspectos fundamentales:[41]

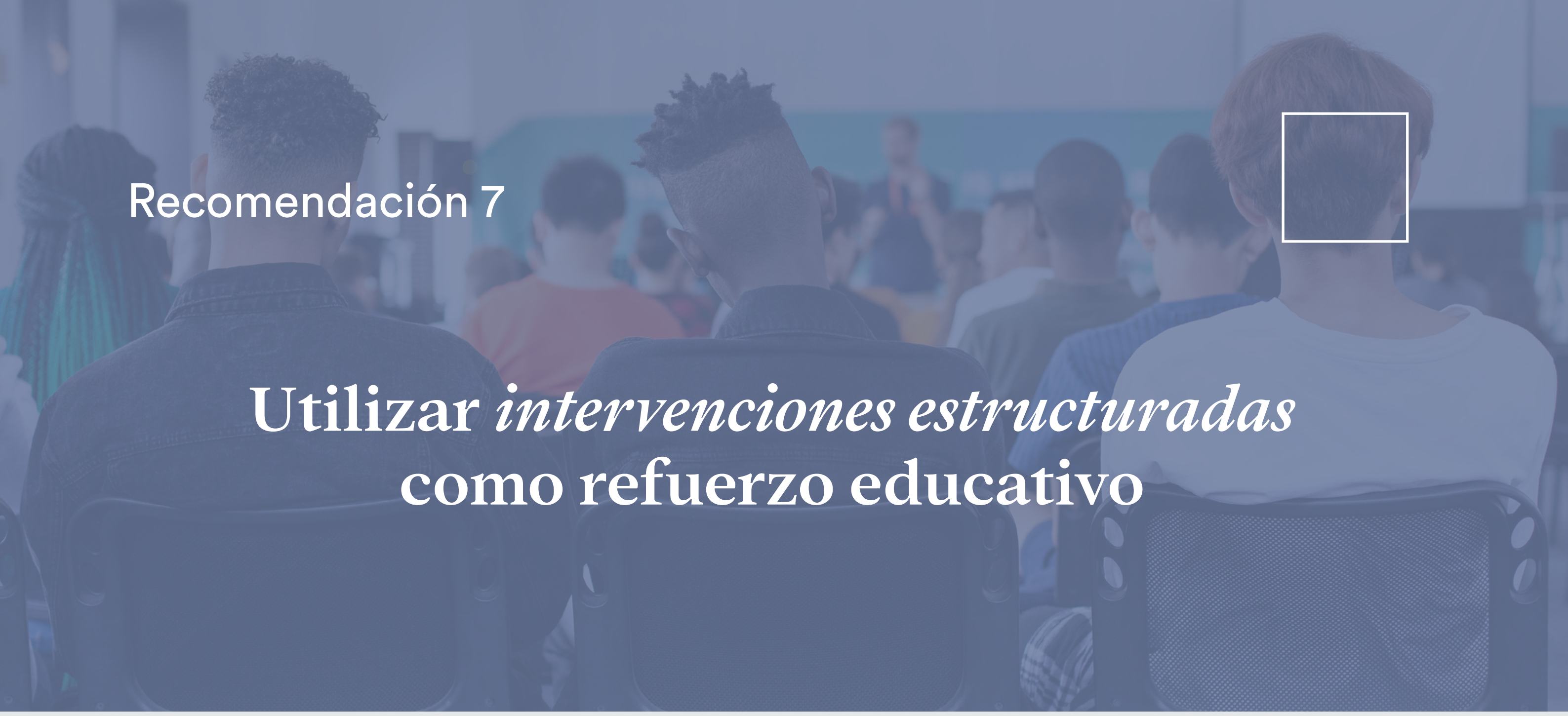
1. Determinar la función de la tecnología en el aprendizaje del alumnado. Hay que formularse preguntas como: ¿qué estrategias docentes y qué tareas ayudarán al alumnado a analizar la relación entre las ecuaciones y las gráficas utilizando programas de geometría dinámica? Con las hojas de cálculo, ¿el alumnado visualizará y transformará mejor los datos? ¿Cómo se pueden diseñar las tareas para aprovechar todo el potencial de la tecnología con el objetivo de proporcionar *feedback* al alumnado?
2. La formación de los profesores no debe limitarse a las habilidades tecnológicas necesarias para utilizar los nuevos equipos. Puede ser necesario contar con un programa de desarrollo profesional continuo sobre cómo utilizar la tecnología para mejorar la enseñanza, en especial si se quiere lograr un cambio significativo.
3. Antes de introducir una tecnología, se deben considerar los posibles costes derivados, como el efecto que puede tener sobre la carga de trabajo de los profesores. Es más, estos costes pueden ser superiores a los de enfoques con una eficacia similar pero que no utilizan tecnología.



Recomendación 7

Utilizar *intervenciones estructuradas* como refuerzo educativo





Recomendación 7

Utilizar *intervenciones estructuradas* como refuerzo educativo

Los centros educativos deben centrarse en mejorar la enseñanza del grupo clase para que redunde en beneficio de todo el alumnado. De este modo, la necesidad de llevar a cabo intervenciones de refuerzo es menor. No obstante, es posible que siga habiendo alumnos que necesiten intervenciones estructuradas de alta calidad para avanzar. Estas intervenciones deben seleccionarse tras evaluar los puntos fuertes y débiles de cada alumno.

Resumen de las evidencias

- Las orientaciones de esta sección se basan en una revisión de la literatura sobre intervenciones en matemáticas, financiada por la EEF y realizada por Ann Dowker.

El modo más fácil de identificar las intervenciones de alta calidad es buscar aquellas que han sido evaluadas rigurosamente y que han producido un efecto positivo en los resultados académicos del alumnado.

Sin embargo, dado que las intervenciones de refuerzo en matemáticas se han evaluado poco, no siempre habrá una intervención que haya sido evaluada con rigurosidad y cuyos resultados sean positivos. Para la EEF, la evaluación de estos programas es prioritaria. Mientras tanto, los centros educativos pueden adoptar e implementar intervenciones que tengan las características de otras que han dado buenos resultados:[42]

- Las intervenciones **deben iniciarse pronto** por dos motivos: porque los problemas en matemáticas pueden afectar al rendimiento en otras áreas curriculares, y para disminuir el riesgo de que el alumnado tenga una actitud negativa hacia las matemáticas, o incluso ansiedad.
- Las intervenciones deben basarse en las **evidencias sobre la enseñanza eficaz y el desarrollo normal de las capacidades matemáticas**. ¿Cómo se relacionan las intervenciones con las recomendaciones que se ofrecen en esta guía?
- Las intervenciones deben incluir **enseñanza explícita y sistemática**, es decir, ofrecer modelos eficientes de resolución de problemas, promover la verbalización del proceso de pensamiento, proporcionar prácticas guiadas y *feedback* correctivo, y llevar a cabo revisiones acumulativas frecuentemente.[43]
- Es fundamental que las intervenciones se implementen de manera eficaz para obtener los resultados deseados. **Es necesario planificar y utilizar con precisión los recursos escolares, incluido todo el personal**. Incluso el programa mejor diseñado fracasará si el equipo docente no dispone de tiempo, está sobrecargado o no cuenta con la capacitación adecuada para llevarlo a cabo.
- Asegurarse de que **las intervenciones y las clases con todo el grupo están vinculadas**. A menudo, las intervenciones son muy distintas de las actividades que se llevan a cabo en clase. Por ello, es esencial que el trabajo que se hace en las intervenciones sea consistente con el que se hace en el aula, y que

el alumnado entienda cómo se vinculan; y no debe darse por sentado que el alumnado detecte y entienda estos vínculos por sí solos.

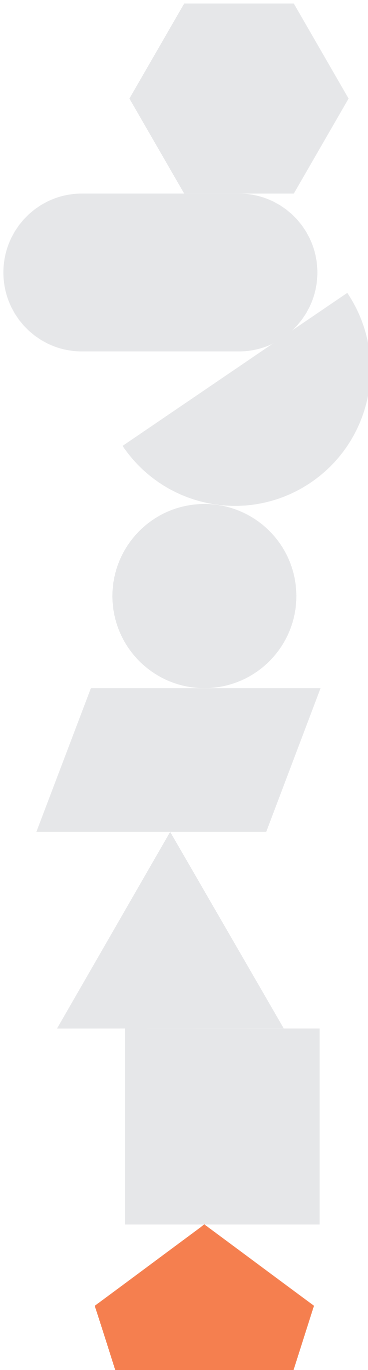
- **Las intervenciones tienen que motivar al alumnado** y evitar o contrarrestar la asociación de las matemáticas con el aburrimiento y la ansiedad. El uso de juegos, por ejemplo, es una característica habitual de los programas prometedores, en especial los dirigidos a educación primaria.
- **Prestar mucha atención a lo que puede perderse el alumnado si forma parte de una intervención.** ¿Se perderán actividades que les gustan? ¿Se perderán contenido curricular que deben aprender? ¿Serían más eficaces las clases con todo el grupo? Es esencial que las intervenciones sean más eficaces que las clases a las que asistirían con todo el grupo; si no es así, el alumnado de las intervenciones puede quedarse atrás respecto a sus compañeros.
- Es importante **evitar la fatiga derivada de la intervención**, tanto en los profesores como en el alumnado. Las intervenciones eficaces no tienen por qué ser siempre muy prolongadas o intensivas.

Cuadro 15: Dificultades de aprendizaje específicas en matemáticas

Hay un debate muy vivo acerca de si existe un trastorno específico que puede denominarse «discalculia», si debería considerarse el extremo más bajo de un continuo de capacidades matemáticas, o si se da en alumnos a los que les cuestan las matemáticas pero su rendimiento académico es normal. Aún no sabemos si los niños con dificultades matemáticas más graves o más específicas necesitan intervenciones muy distintas a las de los demás.[44] Si al alumnado les cuestan mucho las matemáticas, es probable que lo más eficaz sea lograr entender sus puntos fuertes y débiles y, a partir de ahí, ofrecer el apoyo adecuado (véase la Recomendación 1).

Recomendación 8

Acompañar al alumnado para favorecer su *transición de primaria a secundaria*



Recomendación 8

Acompañar al alumnado para favorecer su *transición de primaria a secundaria*

En España, se observa una gran disminución del rendimiento en matemáticas y las actitudes frente a las matemáticas cuando los estudiantes pasan de la escuela primaria a secundaria. Es evidente que las escuelas deberían ayudar a los alumnos a realizar una transición satisfactoria. Lamentablemente, existen pocas evidencias relativas a la eficacia de intervenciones de refuerzo concretas que abordan esta bajada en específico.

Sin embargo, los datos de estudios más amplios sugieren algunas consideraciones clave:

- **¿Comparten los centros de primaria y de secundaria la misma concepción del currículo, la enseñanza y el aprendizaje?** Probablemente, los profesores, tanto de primaria como de secundaria, serían más eficientes si estuvieran familiarizados con el currículo de matemáticas y los métodos docentes de los cursos en que no imparten clase.
- **¿Cómo garantizan los centros de primaria que el alumnado acaba esta etapa con los conocimientos y la comprensión bien consolidados?** Los centros de primaria podrían dotar al alumnado de una protección contra los problemas habituales del cambio de etapa e, incluso, de centro.
- **¿Los profesores de secundaria conocen bien los puntos fuertes y débiles del alumnado cuando llegan a 1.º de secundaria?** (Véase la Recomendación 1). ¿Utilizan esta información para ampliar aspectos fundamentales del currículo de matemáticas de primaria de manera conveniente, a fin de que sea motivadora y no simplemente repetitiva?
- **¿Cómo ofrecen intervenciones estructuradas los centros de secundaria al alumnado de 1.º de secundaria a los que les cuesta avanzar?** (Véase la Recomendación 7).
- **¿Cómo se distribuye el alumnado que llega a 1.º de secundaria en las clases de matemáticas?** Las evidencias apuntan a que distribuir al alumnado en las clases de matemáticas en función de su rendimiento anterior (lo que suele denominarse «agrupación por capacidades») no conduce, por término medio, a un aumento del rendimiento general y, además, puede incrementar la diferencia de rendimiento. Tiene un efecto ligeramente negativo en el alumnado de las clases con un nivel inferior, y ligeramente positivo en el alumnado de las clases con un nivel superior. El alumnado desfavorecido tiene más probabilidades de ser asignados a clases con un nivel inferior; y es probable que esta distribución haga que la diferencia de rendimiento entre ellos y el resto de el alumnado sea mayor.[45]

Resumen de las evidencias

- Lamentablemente, son pocas las evidencias sobre la eficacia de intervenciones concretas centradas en esta transición. Esta recomendación se basa en las evidencias más generales sobre la enseñanza eficaz, y las aplica al problema específico que plantea la transición. Numerosos metanálisis sobre esta distribución indican, consistentemente, que incrementa la diferencia de rendimiento entre la clase de nivel más bajo y la de nivel más alto.

Una clase de matemáticas en la que se conversa y se reflexiona sobre lo cotidiano. Una buena práctica en la Escola Guinadró SCCL de Barcelona

Tuti Comalat es profesora de matemáticas en quinto y sexto de Educación Primaria en la Escola Guinardó SCCL. Hace unos años, en su centro decidieron hacer un cambio metodológico y modificar la forma de abordar las matemáticas. Uno de los cambios que decidieron hacer es que en el último ciclo de primaria todos los días se imparten matemáticas y hay una docente especializada en el área —en este caso, Tuti— que solo se encarga de esta asignatura.

Cuando eres alumno de Tuti y llegas a una de sus clases de matemáticas, lo primero que haces es conversar sobre el tema que se trabajará ese día. Por ejemplo, si toca trabajar los decimales, hablareis sobre dónde habéis visto decimales. Después, Tuti repartirá unas etiquetas con precios y, en grupos, el alumnado las ordenará de menor a mayor. A continuación, se ordenarán números decimales aleatorios en una gran **recta numérica** que hay en el pasillo: «salimos de la clase, nos movemos, nos activamos, y así colocamos los números en la recta», explica la profesora.

En su clase, también se dedican un par de momentos a la semana a trabajar el **cálculo mental** y la resolución de problemas de cálculo «de los rápidos»: «En casa hay cinco galletas; si mi abuelo se come dos, Pepe se come una y yo me como otra, ¿cuántas quedan?». Tuti lee el problema dos o tres veces y el alumnado tiene que responder rápidamente de forma individual. Esto también le sirve a Tuti para trabajar la **autoevaluación** y para **celebrar el error**. Para Tuti, el error es siempre una oportunidad de aprendizaje que no debemos dejar pasar.

Además, un día a la semana se trabaja la geometría **de forma manipulativa**. Se practica midiendo los objetos cercanos y cotidianos para familiarizarse con el sistema métrico decimal. Por ejemplo, pesan un kilo de harina y un vaso de agua o miden las baldosas, las mesas o el pasillo.

Al estar en el último ciclo de educación primaria, en las clases de Tuti también hay que hablar **del paso a la ESO**. Para quitar el miedo a sus estudiantes, Tuti presenta y enseña al alumnado las competencias que tendrán que desarrollar para entrar en secundaria y ejercicios parecidos a los que tendrán que hacer frente. Esto permite que los estudiantes se den cuenta de que «el cambio no es para tanto» y se enfrentan al salto desde un lugar de mayor seguridad.

Glosario

Glosario	
Manipulativo	Objeto que el alumnado y el profesorado pueden tocar y mover, usado como apoyo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Entre los manipulativos más conocidos se encuentran las regletas de Cuisenaire, los bloques lógicos de Dienes y los policubos.
Metanálisis	Tipo de revisión sistemática de investigaciones que se centra en las evidencias cuantitativas de diversos estudios y las combina estadísticamente para obtener una conclusión más fiable o más sólida que la que puede extraerse de cada estudio por separado.
Múltiplo	Para cualquier número entero a y b, a es múltiplo de b si existe un tercer número entero c tal que $a = bc$. Por ejemplo, 14, 49 y 70 son múltiplos de 7 porque $14 = 7 \times 2$, $49 = 7 \times 7$ y $70 = 7 \times 10$; -21 también es múltiplo de 7 dado que $-21 = 7 \times -3$.[46]
Fracción mixta	Un número entero y una parte fraccionaria expresada como una fracción común. Ejemplo: $1\frac{1}{3}$ es una fracción mixta.[47]
Contraejemplo	Todo aquello que no es un ejemplo de un concepto.
Números conectados (*number bonds*)	Un par de números que dan un total determinado; por ejemplo, los números conectados del 10 son todos los pares de números enteros que dan 10.[48]
Proporción	Relación entre una parte y el todo. Por ejemplo, si se reparten 20 € entre dos personas con la razón 3:5, una de ellas recibe 7,50 €, que es $\frac{3}{8}$ del todo de 20 €; es decir, su proporción del todo. Si dos variables x e y se relacionan mediante una ecuación $y = kx$, y es directamente proporcional a x; también se puede decir que y varía directamente con x. Cuando y se representa en una gráfica en relación con x, se obtiene una línea recta que pasa por el origen. Si dos variables x e y se relacionan mediante una ecuación $xy = k$, o de manera equivalente $y = k/x$, donde k es una constante y $x \neq 0$ e $y \neq 0$, dichas variables varían en proporción inversa.[49]
Tasa	Medida de la rapidez con que una cantidad cambia en relación con otra. Por ejemplo, la velocidad es una medida de cómo cambia la distancia recorrida en función del tiempo.[50]
Razón	Relación entre una parte y otra parte. La razón de a y b se escribe, generalmente, como $a{:}b$. Por ejemplo, en una receta de un pastel se indica que la mantequilla y la harina se mezclan en la proporción 1:2, lo que significa que la mantequilla tiene la mitad de masa que la harina, es decir, la cantidad de mantequilla / cantidad de harina = ½. Por tanto, las razones equivalen a partes fraccionarias determinadas.[51]
Representaciones	Forma particular de presentar las matemáticas.[52] Algunos ejemplos de representaciones son: ● Dos fracciones representadas en una recta numérica. ● Una función cuadrática expresada algebraicamente o presentada visualmente como una gráfica. ● Una distribución de probabilidad presentada en una tabla o representada en un histograma.
Revisión sistemática	Síntesis de las evidencias aportadas por estudios de investigación sobre un determinado tema, en la que se aplican criterios de exclusión estrictos para aquellos estudios que no cumplen ciertos requisitos metodológicos. Las revisiones sistemáticas que proporcionan una estimación cuantitativa de un tamaño del efecto se denominan «metanálisis».

Referencias bibliográficas

1. Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. Educational Researcher, 15(2), 4-14.; Coe, R., Aloisi, C., Higgins, S., y Major, L. E. (2014). What makes great teaching? Review of the underpinning research. Londres: The Sutton Trust; Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., y Tsai, Y.-M. (2010). Teachers' Mathematical Knowledge, Cognitive Activation in the Classroom, and Student Progress. *American Educational Research Journal*, 47(1), 133-180. doi:10.3102/0002831209345157.
2. Dowker, A. (próximamente). *Review of Mathematics Education Programmes*. Londres: The Education Endowment Foundation.
3. Higgins, S., Katsipataki, M., Coleman, R., Henderson, P., Major, L.E., Coe, R. y Mason, D. (2018). *The Sutton Trust-Education Endowment Foundation Teaching and Learning Toolkit*. Londres: Education Endowment Foundation.
4. Elliott, V. *et al.* (2016). *A marked improvement? A review of the evidence on written marking*. Londres: Education Endowment Foundation.
5. Smith III, J. P., diSessa, A. A., y Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences*, 3(2), 115-163.
6. Íbid.
7. Hansen, A. (ed.) (2017). *Children's Errors in Mathematics* (4a ed.). Londres: Sage.; Ryan, J., y Williams, J. (2007). *Children's mathematics 4-15: Learning from errors and misconceptions*. McGraw- Hill Education.; Hart, K. M., Brown, M. L., Kuchemann, D. E., Kerslake, D., Ruddock, G., y McCartney, M. (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres: John Murray.
8. Carbonneau, K. J., Marley, S. C., y Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 380.
9. NCETM curriculum glossary.
10. Óp. cit. Carbonneau, K. J. *et al.* (2013).
11. Nunes, T. Bryant, P., y Watson, A. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. Londres: Nuffield Foundation.
12. Óp. cit. Carbonneau, K. J. *et al.* (2013).
13. Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198. doi: 10.1016/j.learninstruc.2006.03.001.
14. Ainsworth, S. (2006).
15. Woodward, J., Beckmann, S., Driscoll, M., Franke, M., Herzig, P., Jitendra, A., Koedinger, K. R., y Ogbuehi, P. (2012). *Improving mathematical problem solving in grades 4 through 8: A practice guide* (NCEE 2012- 4055). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Recuperado de: https://ies.ed.gov/ncee/wwc/publications_reviews.aspx#pubsearch/
16. Gersten, R. *et al.* (2009). *Assisting students struggling with mathematics: Response to Intervention (RtI) for elementary and middle schools* (NCEE 2009-4060). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education.
17. Siegler, R. *et al*. (2010). *Developing effective fractions instruction for kindergarten through 8th grade: A practice guide* (NCEE # 2012 -4039). Washington, DC: National Center for Education Evaluation and Regional Assistance, Institute of Education Sciences, U.S. Department of Education. Recuperado de: whatworks.ed.gov/publications/practiceguides
18. Brown, J. S., y Van Lehan, K. (1982). Towards a generative theory of 'bugs'. En T. P. Carpenter, J. M. Moser, y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum
19. Ellington, A. J. (2003). A meta-analysis of the effects of calculators on students' achievement and attitude levels in precollege mathematics classes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 433-463.; Hembree, R., y Dessart, D. J. (1986). Effects of hand-held calculators in precollege mathematics education: A meta-analysis. *Journal for research in mathematics education*, 17(2), 83-99.
20. Ruthven, K. (1998). The Use of Mental, Written and Calculator Strategies of Numerical Computation by Upper Primary Pupils within a 'Calculator-Aware' Number Curriculum. *British Educational Research Journal*, 24(1), 21-42.

21. Siegler *et al.* (2010).
22. Íbid.
23. Nunes, T. *et al.* (2009).
24. Jones, I., y Pratt, D. (2012). A Substituting Meaning for the Equals Sign in Arithmetic Notating Tasks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(1), 2-33.
25. Nunes, T. *et al.* (2009).
26. Muijs, D. *et al.* (próximamente), *Evidence review for the EEF metacognition review*. Londres: Education Endowment Foundation.
27. Lai, E. R. (2011). *Metacognition: A literature review*. Always learning: Pearson research report.
28. Wittwer, J., y Renkl, A. (2010). How effective are instructional explanations in example-based learning? A meta-analytic review. *Educational Psychology Review*, 22(4), 393-409.
29. Kramarski, B., y Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, 40(1), 281-310.
30. Rittle-Johnson, B., Loehr, A. M., y Durkin, K. (2017). Promoting self-explanation to improve mathematics learning: A meta-analysis and instructional design principles. *ZDM Mathematics Education*, 49 (4), p. 1-13599–611.
31. Ellis, A. K., Denton, D. W., y Bond, J. B. (2014). An analysis of research on metacognitive teaching strategies. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 116, 4015- 4024.
32. Kyriacou, C. y Issitt, J. (2008) What characterises effective teacher-initiated teacher-pupil dialogue to promote conceptual understanding in mathematics lessons in England in Key Stages 2 and 3: a systematic review. Technical report. En: *Research Evidence in Education Library*. Londres: EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London.
33. Walshaw, M., y Anthony, G. (2008). The teacher's role in classroom discourse: A review of recent research into mathematics classrooms. *Review of educational research*, 78(3), 523.
34. Ma, X., y Kishor, N. (1997). Assessing the relationship between attitude toward mathematics and achievement in mathematics: a meta-analysis. *Journal for Research In Mathematics Education*, 28(1), 27.
35. Greany, T., Barnes, I., Mostafa, T., Pesniero, N., y Swenson, C. (2016). *Trends in Maths and Science Study (TIMSS): National Report for England*. Londres: Department for Education.
36. Hill, N. E., y Tyson, D. F. (2009). Parental involvement in middle school: a meta-analytic assessment of the strategies that promote achievement. *Journal of Educational Psychology*, 45(3), 740.
37. Patall, E. A., Cooper, H., y Robinson, J. C. (2008). Parent Involvement in Homework: A Research Synthesis. *Review of Educational Research*, 78(4), 1039-1101
38. Petronzi. D. (2016). *The Development of the Numeracy Apprehension Scale for Children Aged 4-7 Years: Qualitative Exploration of Associated Factors and Quantitative Testing* [Tesis doctoral]. University of Derby.
39. Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 33-46.
40. Stein, M. K., Remillard, J., y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, p. 319-369. Charlotte, NC: Information Age Publishing).
41. Higgins, S., Xiao, Z. y Katsipataki, M. (2012) *The Impact of Digital Technology on Learning: A Summary for the Education Endowment Foundation*. Londres: Education Endowment Foundation.
42. Óp. cit. Dowker, A.
43. Gersten, R. *et al*. (2009).

44. Dowker, A. (2009). *What Works for Children with Mathematical Difficulties? The Effectiveness of Intervention Schemes*. Londres: Department of Children, Schools and Families.; Kaufmann, L., Mazzocco, M. M., Dowker, A., von Aster, M., Göbel, S. M., Grabner, R. H., Henik, A., Jordan, N., Karmiloff-Smith, A. D., Kucian, K., Rubinsten, O., Szucs, D., Shalev, R., y Nuerk, H. C. (2013). Dyscalculia from a developmental and differential perspective. *Frontiers in Psychology*, p. 4: 516.
45. Óp. cit. Higgins, S. *et al.* (2018).
46. Óp. cit. NCETM curriculum glossary.
47. Íbid.
48. Íbid.
49. Íbid.
50. Íbid.
51. Íbid.
52. Íbid.

¿Cómo se ha elaborado esta guía?

La guía se ha elaborado en **cinco fases**:

1. **Fuente bibliográfica inicial**: esta guía se basa en una primera revisión realizada por el prof. Jeremy Hodgen, el Dr. Colin Foster y la Dra. Rachel Marks.
2. **Determinar el alcance**: la EEF consultó con diversos profesores y académicos sobre el alcance de esta guía. La EEF decidió el área de interés (primaria y primer año de secundaria), se conformaron un grupo asesor y un equipo de revisión de evidencias y acordaron las preguntas de investigación para la revisión.
3. **Revisar las evidencias**: el equipo de revisión de evidencias buscó las mejores evidencias internacionales disponibles. Cuando fue posible, la revisión se centró en metanálisis y revisiones sistemáticas.
4. **Redactar las recomendaciones**: la EEF trabajó con el grupo asesor para redactar el borrador de la guía y de las recomendaciones. La guía final la redactaron el prof. Steve Higgins, Thomas Martell, el prof. David Waugh, Peter Henderson y el prof. Jonathan Sharples con las aportaciones y el *feedback* de muchos otros.
5. **Traducción y adaptación al contexto español**: el equipo asesor de EduCaixa tradujo la guía al castellano, buscó y añadió las referencias adecuadas para contextualizarla, entrevistó a expertos y expertas y redactó los ejemplos de los centros educativos españoles.

Agradecimientos
Queremos agradecer a los numerosos investigadores y profesionales que han hecho posible esta guía.

Equipo de revisión de evidencias
Jeremy Hodgen, Colin Foster y Rachel Marks.

Apoyo y *feedback*
Roger Beard, Greg Brooks, Charles Hulme, Christine Merrell, Kathy Silva, Robert Slavin y Maggie Snowling.

Contextualización en España
EduCaixa, Isabel Rivero y Lara Crespo.

EduCaixa quiere expresar su agradecimiento a Mari Cruz Morcillo (CEIP San Félix, Murcia), Lidia Esparza (CEIP San Félix, Murcia) y Tuti Comalat (Escola Guinadró SCCL, Barcelona) por compartir su experiencia docente en relación con la enseñanza de las matemáticas. También quiere expresar su agradecimiento a Sergi Muria y a Joan Jareño por su ayuda como expertos en matemáticas.

Fundación "la Caixa"